**УДК 519.234**

# МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ Н-ПРОЦЕССОВ

**Медведев Александр Васильевич**
Д.т.н., профессор, Сибирский федеральный университет, 660074, г. Красноярск, ул. Академика Киренского, 26, корпус 1
**Чжан Екатерина Анатольевна**
Аспирант, Сибирский федеральный университет, 660074, г. Красноярск, ул. Академика Киренского, 26, корпус 1, e-mail: ekach@list.ru

**Аннотация.** В статье рассматриваются особенности моделирования многомерных дискретно-непрерывных процессов с запаздыванием, входные переменные которых связаны стохастической зависимостью. Вид зависимости исследователю не известен. Проведена серия вычислительных экспериментов по построению непараметрических моделей в условиях неполноты априорной информации, малых выборок и при наличии помех.

**Ключевые слова**: непараметрическое моделирование, «трубчатые» процессы, Н-процессы.

**Введение.** В различных отраслях производства (металлургия, нефтехимия, стройиндустрия) доминируют дискретно-непрерывные процессы с запаздыванием. Технологические процессы протекают во времени непрерывно, но измерения входных и выходных характеристик процесса происходят дискретно. С дискретностью контроля связана следующая особенность, которую необходимо учитывать при решении задачи идентификации. Входные и выходные переменные могут измеряться через различные интервалы времени. Например, если значения некоторых характеристик могут быть получены с помощью электрических средств контроля (температура), то дискретность может быть сколь угодно малой. Значения других переменных – лишь после проведения химического или физико-механического анализа. Примером таких характеристик может послужить активность цемента. Марку цемента, следовательно, и его стоимость, определяет такой показатель, как активность – прочность сжатия. Значение активности согласно ГОСТ 310.4-81 может быть получено только после 28 суток. Таким образом, нет возможности использовать этот показатель в целях управления. В некоторых случаях, дискретность контроля значительно превышает постоянную времени объекта, поэтому динамические процессы вынуждены рассматривать как статические с запаздыванием.

Часто на практике при исследовании, моделировании реальных процессов исследователь сталкивается с ситуацией, когда между входными переменными процесса существует зависимость. Вид этой зависимости остается неизвестным. Выявление и восстановление этих зависимостей - сложный и трудоемкий процесс. Моделированию такого рода процессов посвящена данная статья.

**1. Постановка задачи.** Процессы со стохастической зависимостью компонент вектора входа носят название «трубчатых» или Н-процессов. Общая схема «трубчатого» процесса представлена на рис. 1 [1].

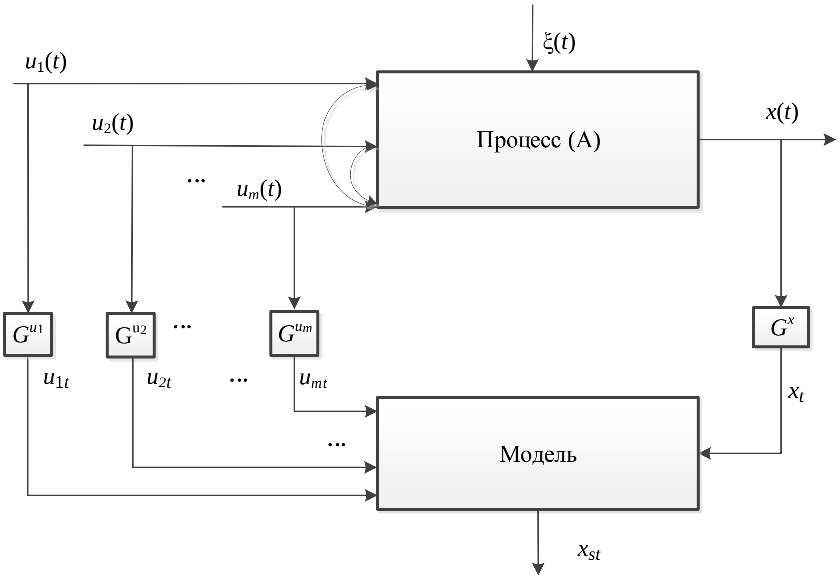


**Рис. 1.** Схема многомерного «трубчатого» процесса

На рис. 1 приняты обозначения: А – неизвестный оператор, $x(t) \in \Omega(x) \subset R^1$ – выходная переменная процесса, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)), u(t) \in \Omega(u) \subset R^m$ – векторное входное воздействие, $\xi(t)$ – векторное случайное воздействие, $(t)$ – непрерывное время, $G^{u_i}, i = \overline{1,m}$, $G^x$ – каналы связи, соответствующие различным переменным, включающие в себя средства контроля. В каналах измерения входных и выходных переменных действуют случайные помехи с нулевыми математическими ожиданиями и ограниченными дисперсиями.

Задача идентификации состоит в восстановлении зависимости между входными и выходными переменными процесса. Как уже было сказано выше, отличительная особенность Н-процессов состоит в том, что стохастически связаны не только входные и выходные переменные процесса, но и входные переменные между собой. Обратимся к рис. 1, где дугообразными стрелками показан возможный вариант взаимосвязи компонент вектора входа. На рисунке показан возможный вариант зависимости, в каждом конкретном случае расположение стрелок будет различным

**2. Непараметрическая идентификация.** В условиях неполноты априорной информации, когда нет возможности определить параметрическую структуру с точностью до вектора параметров, целесообразно использовать средства непараметрической статистики [4]. К таким методам могут быть отнесены нейронные сети или нечеткая логика [4]. В работе была использована непараметрическая оценка функции регрессии по наблюдениям Надарая-Ватсона [3]:

$$x_s(u) = \sum_{i=1}^{s} x_i \prod_{j=1}^{m} \Phi\left(c_s^{-1}\left(u^j - u_i^j\right)\right) \Big/ \sum_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{m} \Phi\left(c_s^{-1}\left(u^j - u_i^j\right)\right), \tag{1}$$

где $\Phi\left(c_s^{-1}\left(u^j - u_i^j\right)\right), i = \overline{1,s}, j = \overline{1,m}$ – колоколообразная функция и коэффициент размытости ядра $c_s$ удовлетворяют условиям сходимости [2, 3]. В вычислительных экспериментах была использована параболическая функция:

$$\Phi\left(c_s^{-1}\left(u^j-u_i^j\right)\right)=\begin{cases}0{,}75\left(1-\left(c_s^{-1}\left(u^j-u_i^j\right)\right)^2\right), \text{если } \left|c_s^{-1}\left(u^j-u_i^j\right)\right|<1,\\ 0, \text{если } \left|c_s^{-1}\left(u^j-u_i^j\right)\right|\geq 1.\end{cases} \quad (2)$$

Точность моделирования оценим по величине относительной ошибке аппроксимации:

$$W=\sqrt{\frac{\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\left(x_{si}-x_i\right)^2}{\frac{1}{s-1}\sum_{i=1}^{s}\left(x_i-\hat{m}_x\right)^2}}. \quad (3)$$

Ошибка (3) является нормированной и её значения принадлежат интервалу [0, 1]. Ошибку (3) можно интерпретировать следующим образом: чем меньше значение (3), тем точнее модель (2) описывает рассматриваемый объект.

**3. Вычислительный эксперимент.** Непараметрическую оценку (1) можно отнести к классу локальной аппроксимации. Н-процесс протекает не во всей регламентированной области, а лишь в некоторой его подобласти вследствие наличия зависимости между входными переменными процесса. В этом случае можно использовать методы, основанные на данных (data-based approach) [5]. В отличие от параметрического подхода, когда модель представляет собой некоторую поверхность в многомерном пространстве признаков, восстановление происходит только в тех областях, где реально протекает процесс и имеются наблюдения объекта.

Ниже представлены результаты по моделированию многомерного «трубчатого» процесса, процессы такого типа часто встречаются на практике [6]. В рамках вычислительного эксперимента рассмотрим различные виды зависимостей между входными переменными. Пусть объект описывается следующим уравнением:

$$x(u)=2u_1u_2-u_1^2+1{,}5u_3u_2^2+2u_3^3u_4-u_5u_6^3+u_7^2u_8^3-2u_9u_{10}^4+1{,}5u_9+\xi, \quad (4)$$

где $u_i, i=\overline{1{,}10}$ – входные переменные, равномерно распределенные в интервале [0;3], где $\xi$ – равномерно распределенная помеха, значения которой подчиняются следующему правилу:

$$\xi=k\sigma x(u), \quad (5)$$

где $k$ – уровень помех, $\sigma$ – случайная величина, распределенная по равномерному закону в интервале [-1; 1], $x(u)$ – выход объекта, для которого генерируется значение помехи.

Рассматриваемый объект является «трубчатым», т.е. его компоненты вектора входной переменной связаны некоторой зависимостью. На практике эта зависимость остается неизвестной, однако для проведения экспериментов мы зададим вид зависимости. Стоит заметить, что вид зависимости задан только для генерации выборок наблюдений и в дальнейшем считается неизвестным. Пусть входные переменные связаны следующими отношениями (табл. 1). В табл. 1: $u_1$ – независимая переменная, значения которой равномерно распределены в интервале [0;3]. Значения генерируются с помощью встроенного датчика псевдослучайных чисел платформы .Net (язык C#). Все остальные переменные $u_2$ – $u_{10}$ связаны между собой.

**Таблица 1.** Вид зависимости между входными переменными объекта (4)

| Переменная | Вид зависимости |
|---|---|
| $u_1$ | [0;3] |
| $u_2$ | $\sqrt{u_1}$ |
| $u_3$ | $\sin u_1$ |
| $u_4$ | $u_2 + u_3$ |
| $u_5$ | $u_4$ |
| $u_6$ | $0{,}4u_1^2$ |
| $u_7$ | $u_4 + u_6$ |
| $u_8$ | $\sqrt{u_4}$ |
| $u_9$ | $u_4^{1,5}$ |
| $u_{10}$ | $u_1 + u_9$ |

В общем виде «трубчатый» объект может иметь следующее описание:

$$\begin{cases} x = f(u_1, u_2, ..., u_{10}), \\ u_2 = f(u_1), \\ u_3 = f(u_1), \\ \dots \\ u_{10} = f(u_1, u_9). \end{cases} \tag{6}$$

Проведем серию вычислительных экспериментов: будем увеличивать число независимых переменных. В первом эксперименте все переменные, кроме $u_1$, функционально связаны, в частности, $u_2 = f(u_1)$, $u_3 = f(u_1)$, …, $u_{10} = f(u_1)$. Во втором эксперименте свободными являются $u_1 - u_2$, а все остальные зависят от них, т.е. значения переменных равномерно распределены в интервале [0;3], а переменные $u_3 = f(u_1)$, $u_4 = f(u_1, u_2)$, …, $u_{10} = f(u_1, u_2)$. В дальнейших экспериментах число независимых переменных увеличивается и, наконец, в 10-м эксперименте все переменные свободные, т.е. не зависимы между собой.

Каждый раз была сгенерирована выборка наблюдений $\{u_i, x_i, i = \overline{1{,}1000}\}$ при отсутствии помех.

**Таблица 2**. Результаты моделирования «трубчатого» объекта в отсутствие помех

| № | Независимые переменные | Относительная ошибка $W$ | $c_s$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $u_1$ | 0,0088 | 0,2 |
| 2 | $u_1$, $u_2$ | 0,049 | 0,5 |
| 3 | $u_1$, $u_2$, $u_3$ | 0,077 | 0,8 |
| 4 | $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ | 0,103 | 0,9 |
| 5 | $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$ | 0,109 | 1,2 |
| 6 | $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$, $u_6$ | 0,185 | 1,5 |
| 7 | $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$, $u_6$, $u_7$ | 0,189 | 1,5 |
| 8 | $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$, $u_6$, $u_7$, $u_8$ | 0,197 | 1,6 |
| 9 | $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$, $u_6$, $u_7$, $u_8$, $u_9$ | 0,323 | 1,6 |
| 10 | $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$, $u_6$, $u_7$, $u_8$, $u_9$, $u_{10}$ | 0,562 | 1,6 |

Был рассмотрен случай без учета помех. В дальнейшем на выход объекта (4) наложим помеху $k$ = 0,05 и проведем аналогичные эксперименты – будем варьировать число независимых переменных, генерируя выборку объемом 1000 наблюдений $\{u_i, x_i, i = \overline{1{,}1000}\}$. Результаты моделирования представлены в таблице 3.

**Таблица 3**. Результаты моделирования «трубчатого» объекта при $k$ = 0,05

| № | Независимые переменные | Относительная ошибка $W$ | $c_s$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $u_1$ | 0,034 | 0,2 |
| 2 | $u_1$, $u_2$ | 0,054 | 0,5 |
| 3 | $u_1$, $u_2$, $u_3$ | 0,109 | 0,9 |
| 4 | $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ | 0,120 | 1,1 |
| 5 | $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$ | 0,136 | 1,4 |
| 6 | $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$, $u_6$ | 0,183 | 1,5 |
| 7 | $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$, $u_6$, $u_7$ | 0,202 | 1,6 |
| 8 | $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$, $u_6$, $u_7$, $u_8$ | 0,212 | 1,6 |
| 9 | $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$, $u_6$, $u_7$, $u_8$, $u_9$ | 0,371 | 1,6 |
| 10 | $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$, $u_6$, $u_7$, $u_8$, $u_9$, $u_{10}$ | 0,621 | 1,6 |

С увеличением уровня помех ошибка аппроксимации $W$ увеличивается незначительно. Однако в обоих случаях ($k$ = 0 и $k$ = 0,05) сохраняется одинаковая тенденция – с ростом числа независимых переменных ошибка аппроксимации растет. При этом найденные значения параметра размытости $c_s$ практически совпадают с теми, что были найдены в предыдущем случае, т.е. уровень помех практически не оказывает влияние на оптимальное значение параметра размытости. На рис. 2 показан график зависимости ошибки аппроксимации от числа независимых переменных при объеме выборки 1000 наблюдений: сплошной линией показан случай отсутствия помех, пунктирной – помеха $k$ = 0,05.

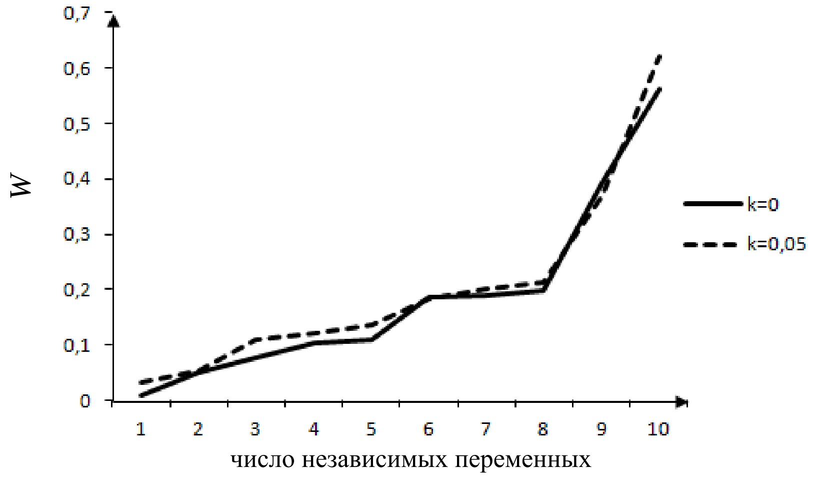


**Рис. 2.** Зависимость величины $W$ от числа независимых переменных

**Заключение**. В статье представлены результаты моделирования многомерного «трубчатого» процесса. В качестве модели принята многомерная непараметрическая оценка функции регрессии по наблюдениям Надарая-Ватсона. Можно сделать вывод, что с ростом помехи качество модели при одинаковом объеме выборок несколько уменьшается. При небольшом объеме выборок и большом числе переменных, описывающих процесс, точную модель можно получить только при наличии сильной зависимости между входными переменными. С ростом числа зависимых переменных точность моделирования увеличивается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Медведев А.В. Анализ данных в задаче идентификации // Компьютерный анализ данных моделирования. Том 2. Минск : БГУ. 1995. С. 201 – 206.
2. Медведев А.В. Основы теории адаптивных систем. Красноярск: изд-во СибГАУ. 2015. 525 с.
3. Надарая Э. А. Непараметрические оценки плотности вероятности и кривой регрессии. Тбилиси: издательство Тбилисского университета. 1983. 194 с.
4. Хардле, В. Прикладная непараметрическая регрессия. Москва : Мир. 1993. 352 с.
5. Block G., Hartman A. M., Dresser C. M., Carroll M. D., Gannon J., Gardner, L. A Data-based approach to diet questionnaire design and testing // American journal of epidemiology, 1984. № 124(3). Pp. 453 – 469.
6. Medvedev A.V., Kornet M.E., Chzhan E.A. Nonparametric modeling of oxygen-converter processes // Steel in Translation. 2016. Vol. 46. № 12. Pp. 855 – 859.

---

**UDK 519.234**

**MODELLING OF MULTIDIMENSIONAL H-PROCESSES**

**Alexander V. Medvedev**
Dr., professor, Siberian Federal University, 660074, Krasnoyarsk, Russia, Akademika Kirenskogo Str., 26, k. 1
**Ekaterina A. Chzhan**
Graduate student, Siberian Federal University, 660074, Krasnoyarsk, Russia, Akademika Kirenskogo Str., 26, k. 1, e-mail: ekach@list.ru

**Abstract.** The article deals with the features of simulation of multidimensional discrete-continuous processes with delay, input variables that are related by stochastic dependence. The type of dependence is unknown to the researcher. We presented a series of computational experiments on the construction of non-parametric models in the conditions of incompleteness of a priori information, small samples and in the presence of interference.
**Keywords:** non-parametric modelling, «tubular» processes, H-process.

**References**

1. Medvedev A.V. Analiz dannyh v zadache identifikacii [Data analysis in identification problem] // Komp'yuternyy analiz dannykh modelirovaniya. Tom 2. = Computer analysis of simulation data. Volume 2. Minsk. Izdatel'stvo BGU = BSU Publ. 1995. Pp. 201 – 206. (in Russian).
2. Medvedev A.V. Osnovy teorii adaptivnyh sistem [Fundamentals of the theory of adaptive systems]. Krasnoyarsk: izd-vo SibGAU = SibSAU Publ. 2015. 525 p. (in Russian).

3. Nadaraja Je.A. Neparametricheskie ocenki plotnosti verojatnosti i krivoj regressii [Non-parametric estimations of the probability density and the regression curve]. Tbilisi: izdatel'stvo Tbilisskogo universiteta = Tbilisi State University Publ. 1983. 194 p. (in Russian).
4. Hardle V. Prikladnaja neparametricheskaja regressija [Applied non-parametric regression]. Moscow. Mir Publ. 1993. 352 p. (in Russian).
5. Block G., Hartman A. M., Dresser C. M., Carroll M. D., Gannon J., Gardner, L. A Data-based approach to diet questionnaire design and testing // American journal of epidemiology. 1984. № 124(3). Pp. 453 – 469.
6. Medvedev A.V., Kornet M.E., Chzhan E.A. Nonparametric modeling of oxygen-converter processes // Steel in Translation. 2016. №46 (12). Pp. 855 – 859.