

УДК 519.71:681.5:62.752

СВЯЗНОСТЬ ДВИЖЕНИЙ В СИСТЕМАХ С ДИССИПАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ: СИСТЕМНЫЕ ПОДХОДЫ

Елисеев Андрей Владимирович

к.т.н., доцент кафедры «Математика»,

Иркутский государственный университет путей сообщения,
664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского 15, e-mail: eavsh@ya.ru.

Аннотация. В предлагаемой статье развиваются новые подходы в формировании методологического базиса в технологиях оценки свойств механических диссипативных структур на примерах механических систем с сосредоточенными параметрами, которые используются в качестве расчетных схем технических объектов технологического и транспортного назначения. Рассматриваются особенности формирования состояний во взаимодействиях элементов механических систем. Предлагаются методы оценки свойств механических систем на основе характеристик, зависящих от коэффициентов форм движения парциальных блоков в режиме свободных движений.

Введено понятие функции демпфирования, отражающей особенности соотношения кинетической энергии и функции её рассеяния. В приложении к механическим системам с двумя степенями свободы предложен и разработан алгебраический метод построения соответствующей функции демпфирования, зависящей от коэффициента связности, отражающей динамические особенности механической системы. На модельных примерах показано, что построенная функция демпфирования обладает рядом экстремальных свойств, аналогичных свойствам, рассматриваемым для частотных энергетических функций, используемых в методах структурного математического моделирования. Разработан оригинальный метод построения функции демпфирования для оценки особенностей динамических свойств механических систем с диссипацией энергии, отображающий свойства связности форм свободных движений, вызванных начальными условиями. Установлена зависимость между характеристикой демпфирующих элементов и распределением коэффициентов форм, определяющих экстремальные значения функции демпфирования. Рассмотрен ряд форм функций демпфирования для различных вариантов механических систем, включая предельные параметры, определяющие степень связности движения массоинерционных элементов системы. Приводятся результаты решения на модельных примерах.

Ключевые слова. Механическая система с диссипацией, динамические связи, энергетическая частотная функция, функция демпфирования, системный подход, связность движения элементов, экстремальные свойства.

Цитирование: Елисеев А.В. Связность движений в системах с диссипацией энергии: системные подходы// Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2020. № 3 (19). С. 43-56. DOI: 10.38028/ESI.2020.19.3.005.

Введение. Оценке динамических свойств технических объектов, работающих в условиях интенсивных вибрационных нагрузок, уделяется существенное внимание [2, 9-11]. К числу известных подходов можно отнести идеи оценки особенностей динамических свойств систем через отношения потенциальной и кинетической энергии [7, 8]. Использование частотной функции для исследования динамики механических колебательных систем инициировало интерес к расширению области её применения в задачах динамики, ориентированных на учет коэффициентов форм связности движений элементов системы [1, 3-6]. Вместе с тем, методы построения аналога частотной функции для диссипативных систем, в которых отсутствует колебательная форма движения, обладают определенной спецификой, что требует учета ряда особенностей экстремальных свойств функции аналога, зависящей от коэффициентов связности форм движения.

В предлагаемой статье вводится и рассматривается понятие функции демпфирования для диссипативных механических систем по аналогии с частотной функции для колебательных механических систем, зависящей от коэффициента форм связности движения (обозначается α) как отношения координат вектора решения алгебраической системы, построенной на основе уравнений Лагранжа II рода для механической колебательной системы с двумя степенями свободы.

В общем случае, интерес представляет «расширение» области использования частотной функции на механические колебательные системы с диссипацией энергии в рамках методов структурного математического моделирования механических колебательных систем [2, 6, 10]. Вместе с тем, на предварительном этапе исследования и оценки возможностей частотной функции предпринимается попытка рассмотрения формальной процедуры определения аналога частотной функции, построенной на основе алгебраической модели после введения коэффициента связи между формами движения парциальных систем (или блоков). Для механической системы, совершающей затухающие апериодические движения под действием начальных условий, вводится функция, отображающая свойства форм свободных движений в том, что её экстремальные значения совпадают со значениями коэффициентов затухания форм свободного движения механической системы. Для обозначения построенной функции автором используется термин «функция демпфирования».

Предлагаемая статья посвящена развитию метода оценки свойств механических систем на основе использования энергетических функций, зависящих от коэффициентов форм движения парциальных систем в режиме свободных движений.

1. Общие положения. Постановка задачи. Рассматриваются свободные движения механической системы с двумя степенями свободы с учетом сил вязкого трения. Принципиальная схема системы представлена на рисунке 1.

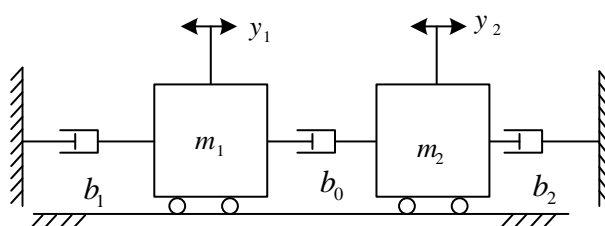


Рис. 1. Механическая система с двумя степенями свободы с учетом сил вязкого трения

Обобщенные координаты y_1, y_2 обозначают положение массо-инерционных элементов m_1, m_2 в системе координат, связанных с неподвижным базисом. Кинетическая энергия, потенциальная энергия и функция рассеяния (или диссипации) энергии имеют вид соответственно:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2, \quad (1)$$

$$\Pi = 0, \quad (1')$$

$$F = \frac{1}{2} b_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} b_0 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{y}_2^2. \quad (1'')$$

Система уравнений Лагранжа второго рода может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_1} = 0; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_2} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_2} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

После подстановки выражений кинетической, потенциальной энергий и функции рассеяния (1'') система дифференциальных уравнений (2) принимает форму:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + (b_0 + b_1) \dot{y}_1 - b_0 \dot{y}_2 = 0; \\ m_2 \ddot{y}_2 + (b_0 + b_2) \dot{y}_2 - b_0 \dot{y}_1 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть решение $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t)$ системы (3) представимо в виде:

$$\vec{y} = \vec{Y} e^{pt}, \quad (4)$$

где $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ - вектор-решение, $\vec{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ - числовой вектор, $p = \sigma + j\omega$ - комплексный

параметр, t - переменная времени. Предполагается, что начальные условия согласованы с видом искомого решения (4). Комплексный, в общем случае, параметр p отображает для механической системы собственную форму движения, вызванную начальными условиями. При отсутствии упругих элементов следует ожидать только затухающего аperiodического движения. Вместе с тем, в рамках рассмотрения возможности сравнения форм движений для различных условий, включая колебательные движения, мнимая часть формально присутствует в выражении параметра p .

Задача заключается в построении функции, отображающей динамические особенности системы, совершающей свободные движения с учетом сил вязкого трения.

2. Построение энергетической функции затухания. Система (3) в обозначениях (4) может быть представлена в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} m_1 p^2 + (b_0 + b_1) p & -b_0 p \\ -b_0 p & m_2 p^2 + (b_0 + b_2) p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (5)$$

Введём A для обозначения матрицы совокупности массо-инерционных коэффициентов и B - для обозначения матрицы коэффициентов вязкого трения:

$$A = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_0 + b_1 & -b_0 \\ -b_0 & b_0 + b_2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

С учетом обозначений A и B соотношение (5) принимает вид матричного выражения, зависящего от параметра p :

$$(p^2 A + pB)\vec{Y} = 0. \quad (7)$$

Скалярное умножение левой и правой частей равенства (7) на вектор \vec{Y} приводит к выражению:

$$p^2 \langle A\vec{Y}, \vec{Y} \rangle + p \langle B\vec{Y}, \vec{Y} \rangle = 0. \quad (8)$$

Выражение (8) может быть преобразовано к виду, левая часть которого представляет аналог отношения Рэлея в виде отношения квадратичной формы функции рассеяния энергии к квадратичной форме кинетической энергии, а правая часть представляет собой параметр комплексный p :

$$\frac{\langle B\vec{Y}, \vec{Y} \rangle}{\langle A\vec{Y}, \vec{Y} \rangle} = -p. \quad (9)$$

При условии, что $p = \sigma$, $\omega = 0$ отношение (9) принимает вид:

$$-\frac{\langle B\vec{Y}, \vec{Y} \rangle}{\langle A\vec{Y}, \vec{Y} \rangle} = \sigma. \quad (10)$$

Положим, что для координат вектора \vec{Y} выполнено соотношение связи координат движения:

$$Y_2 = \alpha Y_1, \quad (11)$$

где α - коэффициент формы.

Вектор \vec{Y} может быть представлен в виде:

$$\vec{Y} = Y_1 \vec{\alpha}, \quad (12)$$

где $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ - вектор, определяемый коэффициентом формы α .

После подстановки $\vec{Y} = Y_1 \vec{\alpha}$ в (10) получаем дробно-рациональное выражение:

$$\sigma(\alpha) = -\frac{\langle B\vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}{\langle A\vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}, \quad (13)$$

которое может быть рассмотрено в качестве определения функции демпфирования $\sigma(\alpha)$, зависящей от коэффициента формы α . Размерность $\sigma(\alpha)$ составляет $кг/с$.

Для рассматриваемой инерционно-диссипативной механической системы с двумя степенями свободы (рис.1) функция демпфирования определяется после подстановки в (13) массоинерционных коэффициентов и коэффициентов, отражающих силы вязкого трения.

Числитель $A_\alpha = \langle A\vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle$ функции демпфирования $\sigma(\alpha)$ имеет вид:

$$A_\alpha = m_1 + m_2 \alpha^2, \quad (14)$$

где величина A_α имеет размерность массы.

Знаменатель $B_\alpha = \langle B\vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle$ функции демпфирования принимает вид:

$$B_\alpha = \left\langle \begin{bmatrix} b_0 + b_1 & -b_0 \\ -b_0 & b_0 + b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \right\rangle = (b_0 + b_2)\alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1, \quad (15)$$

где B_α - имеет размерность коэффициента вязкости.

Для системы на рис.1 функция демпфирования может быть представлена в виде дробно-рационального выражения, зависящего от коэффициента формы α :

$$\sigma(\alpha) = \frac{(b_0 + b_2)\alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1 + m_2\alpha^2}. \quad (16)$$

Конкретная форма функции демпфирования определяется характеристиками элементов рассматриваемой механической системы, совершающей свободные движения под действием начальных условий. К особенностям функции демпфирования можно отнести экстремальные значения и значения, принимаемые при стремлении коэффициента формы α к нулю и бесконечности.

3. Формы функций демпфирования для механических систем. Графики функций диссипации для различных вариантов механических систем с вязким трением определяются значениями масс и коэффициентов вязкого трения соответствующих элементов.

1. Рассматривается частный случай механической системы с двумя степенями свободы (рис. 1). Предполагается, что система принимает свойства $b_1 = 0, b_2 = 0$. Принципиальная схема представлена на рис. 2.

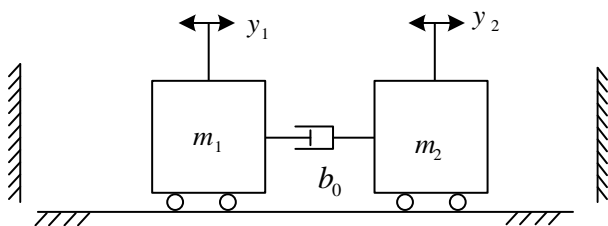


Рис. 2. Принципиальная схема механической системы с диссипативной связью $b_1 = 0, b_2 = 0$
Функция демпфирования принимает вид:

$$\sigma(\alpha) = -\frac{b_0(\alpha - 1)^2}{m_1 + m_2\alpha^2}. \quad (17)$$

Производная соответствующей функции представляется выражением:

$$\sigma(\alpha)' = -\frac{2b_0(\alpha - 1)(m_1 + \alpha m_2)}{(m_1 + m_2\alpha^2)^2}. \quad (18)$$

Функция $\sigma(\alpha)'$ (18) обращается в ноль в двух случаях, если форма $\alpha_1^* = -\frac{m_1}{m_2}$ или $\alpha_2^* = 1$. При

условии, что коэффициенты форм принимают значения $\alpha_1^* = -\frac{m_1}{m_2}$ или $\alpha_2^* = 1$,

соответствующие экстремумы функции демпфирования составляют:

$$\sigma(\alpha_1^*) = -\frac{b_0}{M_{\text{пр}}}, \sigma(\alpha_2^*) = 0, \quad (19)$$

где $M_{\text{пр}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ - приведенная масса механической системы.

На рис. 3 приведен график функции демпфирования (17). В точке α_1^* функция $\sigma(\alpha)$ равна коэффициенту затухания $-\frac{b_0}{M_{\text{пр}}}$ собственной (или свободной) формы движения

$\varphi_1(t) = \exp(-\frac{b_0}{M_{\text{ПР}}}t)$. В точке α_2^* функция затухания равна нулю – коэффициенту затухания свободной формы движения $\varphi_2(t) = 1$ механической системы.

В точках $\alpha_3 = 0$ и $\alpha_4 \rightarrow \infty$ значения функции демпфирования равны парциальным коэффициентам затухания:

$$\sigma(\alpha_3) = -\frac{b_0}{m_1}, \quad \sigma(\alpha_4) = -\frac{b_0}{m_2}. \quad (20)$$

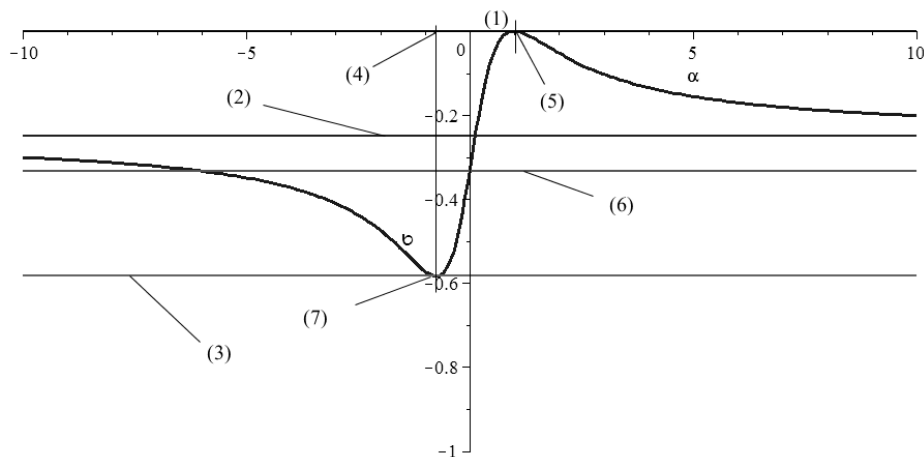


Рис. 3. Функция демпфирования механической системы $b_1 = 0, b_2 = 0, b_0 = 1$ кг/с, $m_1 = 3$ кг., $m_2 = 4$ кг.: (1), (3) – экстремальные уровни, (1), (7) локальные экстремумы, (2),(6) – парциальные коэффициенты затухания

Таким образом, экстремальные значения функции демпфирования $\sigma(\alpha)$, достигаемые в точках $\alpha_1 = -\frac{m_1}{m_2}$ и $\alpha_2 = 1$, совпадают с коэффициентами затухания собственных форм движения системы $\sigma_1 = -\frac{b_0}{M_{\text{ПР}}}$ и $\sigma_2 = 0$. В критических формах движения (ноль и бесконечность) функция демпфирования равна коэффициентам затухания парциальных системы.

2. Рассматривается частный случай системы (рис. 1), обладающей дополнительными свойствами симметрии в виде условий $b_1 = b_2 = b_0 = b, m_1 = m_2 = m$. Расчетная схема представлена на рисунке 4.

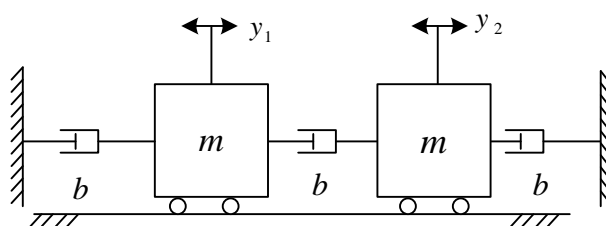


Рис. 4. «Симметричная» механическая система с вязкими связями

Система дифференциальных уравнений (3) имеет вид:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 + 2b\dot{y}_1 - b\dot{y}_2 = 0; \\ m\ddot{y}_2 + 2b\dot{y}_2 - b\dot{y}_1 = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Функция демпфирования для рассматриваемой системы может быть представлена выражением:

$$\sigma(\alpha) = -\frac{2b}{m} \frac{(\alpha^2 - \alpha + 1)}{(1 + \alpha^2)}. \quad (22)$$

Соответствующая производная определяется:

$$\sigma(\alpha)' = -\frac{2b}{m} \frac{(\alpha^2 - 1)}{(1 + \alpha^2)^2}; \quad (23)$$

нули производной функции демпфирования имеют значения $\alpha_1^* = -1, \alpha_2^* = 1$. В этих точках функция демпфирования совпадает со значениями коэффициентов затухания σ_1, σ_2

собственных форм движения $\varphi_1(t) = \exp(-\frac{3b}{m}t), \varphi_2(t) = \exp(-\frac{b}{m}t)$ механической системы:

$$\sigma_1 = \sigma(\alpha_1^*) = -\frac{3b}{m}, \sigma_2 = \sigma(\alpha_2^*) = -\frac{b}{m}. \quad (24)$$

В точках $\alpha_3 = 0, \alpha_4 = \infty$ функция затухания принимает значения:

$$\sigma_3 = \sigma(\alpha_3) = -\frac{2b}{m}, \sigma_4 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sigma(\alpha) = -\frac{2b}{m}. \quad (25)$$

Величины σ_3, σ_4 совпадают с парциальными коэффициентами затухания механической системы (3).

На рис. 5 изображена характерная функция затухания, определяющая диссипативные коэффициенты собственных и парциальных движений механической системы.

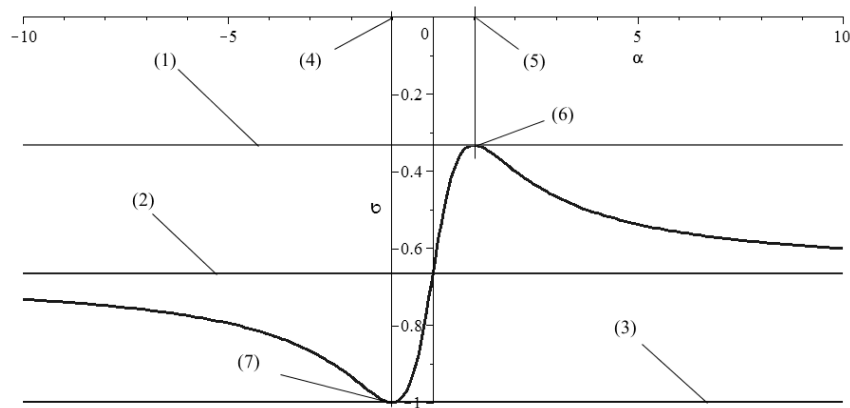


Рис. 5. Функция демпфирования механической системы с условиями

$$b_1 = b_2 = b_3 = b = 1 \text{ кг/с.}, m_1 = m_2 = m_3 = m = 3 \text{ кг}$$

Таким образом, для диссипативной механической системы, достигаемые экстремальные значения функции затухания связаны с коэффициентами затухания собственных движений. В свою очередь, значения функции демпфирования, достигаемые в критических точках (ноль, бесконечность), совпадают с парциальными коэффициентами затухания механической системы.

3. Рассматривается частный случай системы (рис. 1) с учетом «обнуления» вязкой связи с одной из опорных поверхностей, т.е. $b_1 = b_0 = b, b_2 = 0, m_1 = m_2 = m$. Принципиальная схема представлена на рис. 6.

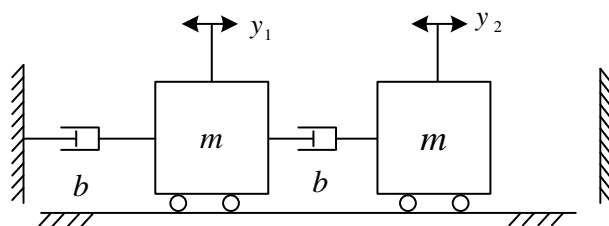


Рис. 6. Инерционно-диссипативная механическая система с «обнуленной» вязкой связью с одной опорной поверхностью

Система дифференциальных уравнений (3) движения механической системы (рис. 6) принимает вид:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 + 2b\dot{y}_1 - b\dot{y}_2 = 0; \\ m\ddot{y}_2 + b\dot{y}_2 - b\dot{y}_1 = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Функция демпфирования имеет вид:

$$\sigma(\alpha) = -\frac{b}{m} \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 2}{1 + \alpha^2}. \quad (27)$$

Определим производную $\sigma(\alpha)'$:

$$\sigma(\alpha)' = -\frac{2b}{m} \cdot \frac{\alpha^2 - \alpha - 1}{(1 + \alpha^2)^2}. \quad (28)$$

Экстремальные значения функция демпфирования $\sigma(\alpha)$ принимает в точках α_1^*, α_2^* :

$$\alpha_1^* = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_2^* = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (29)$$

Соответствующие данным коэффициентам форм экстремальные значения функции демпфирования имеют вид:

$$\sigma_1 = \sigma(\alpha_1^*) = -\frac{b}{m} \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}, \quad \sigma_2 = \sigma(\alpha_2^*) = -\frac{b}{m} \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}. \quad (30)$$

Парциальные коэффициенты затухания σ_3, σ_4 , соответствующие предельным значениям $\sigma(\alpha)$ при $\alpha_3 \rightarrow 0, \alpha_4 \rightarrow \infty$, определяются выражениями:

$$\sigma_3 = \sigma(0) = -\frac{2b}{m}, \quad \sigma_4 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sigma(\alpha) = -\frac{b}{m}. \quad (31)$$

На рис. 7 изображена функция демпфирования для инерционно-диссипативной системы с параметрами $b = 1 \text{ кг/с.}, m = 3 \text{ кг.}$

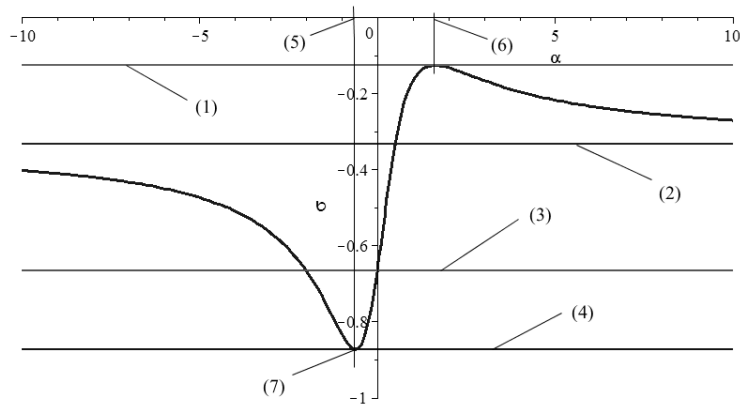


Рис. 7. Функция демпфирования механической системы $b = 1 \text{ кг/с.}$, $m = 3 \text{ кг.}$

4. Особенности отображения функцией демпфирования динамических свойств механических систем для предельных значений параметров.

С точки зрения требований практики интерес представляют возможности расширения области применения функции демпфирования на системы, параметры которых достигают некоторых предельных значений.

Принципиальная схема механической системы (рис. 1) с учетом $b_0 = 0$ представлена на рис. 8.

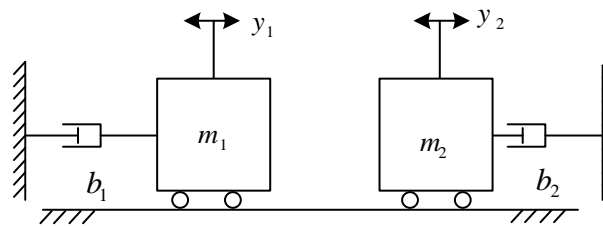


Рис. 8. Принципиальная схема механической система с двумя степенями свободы при условии $b_0 = 0$

Функция демпфирования в данном случае принимает вид:

$$\sigma(\alpha) = -\frac{b_2\alpha^2 + b_1}{m_1 + m_2\alpha^2}, \quad (32)$$

а её производная по α соответственно:

$$\sigma(\alpha)' = -\frac{2\alpha(b_2m_1 - b_1m_2)}{(m_1 + m_2\alpha^2)^2}. \quad (33)$$

Если $m_2b_1 = m_1b_2 = \gamma$, то коэффициенты затухания свободных движений парциальных систем совпадают, а функция демпфирования принимает постоянное значение:

$$\sigma(\alpha) = -\frac{b_1}{m_1} = -\frac{b_2}{m_2}. \quad (34)$$

Если $m_2b_1 \neq m_1b_2$, то функция демпфирования монотонна на интервалах $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$. При этом:

$$\sigma(0) = -\frac{b_1}{m_1}, \quad \sigma(\alpha) \rightarrow -\frac{b_2}{m_2} \text{ при } \alpha \rightarrow \infty. \quad (35)$$

Если $-\frac{b_1}{m_1} < -\frac{b_2}{m_2}$, то функция демпфирования обладает экстремальными свойствами:

$$\inf_{\alpha} \sigma(\alpha) = -\frac{b_1}{m_1}, \quad \sup_{\alpha} \sigma(\alpha) = -\frac{b_2}{m_2}. \quad (36)$$

На рис. 9 изображена характерная функция демпфирования, соответствующая механической системе с параметрами $b_1 = 1$ кг/с, $b_2 = 2$ кг/с., $m_1 = 3$ кг., $m_2 = 4$ кг.

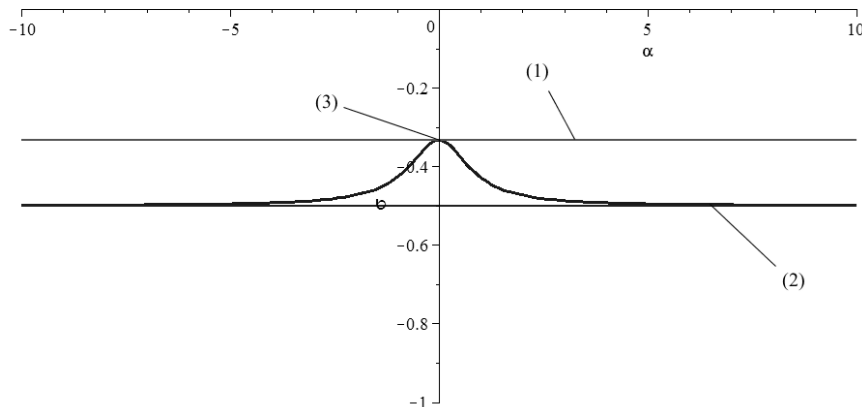


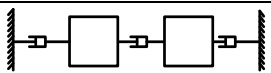
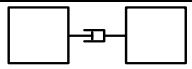
Рис. 9. Функция демпфирования механической системы с параметрами $b_1 = 1$ кг/с, $b_2 = 2$ кг/с, $m_1 = 3$ кг., $m_2 = 4$ кг.: (1), (2) – верхняя и нижняя граница значений функции затухания, (3) – локальный экстремум

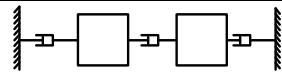
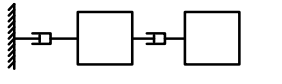
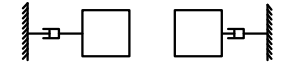
Таким образом, в точках экстремума, включая бесконечность, функция демпфирования достигает значений коэффициентов затухания собственных форм движения механической системы.

5. Функции демпфирования в отображении динамических связей между элементами механической системы.

В таблице 1 представлены характерные варианты функций демпфирования механических систем с двумя степенями свободы для различных значений массоинерционных и диссипативных параметров, определяющих разнообразие динамических связей. В частности, представленные варианты (таблица 1, варианты 1-4) отображают наличие существенной динамической связи между элементами.

Таблица 1. Функции демпфирования механических систем

Вариант	Параметры	Схема	Функция демпфирования	Коэффициенты затухания парциальных систем
1	b_0, b_1, b_2, m_1, m_2		$\sigma(\alpha) = (b_0 + b_2)\alpha^2 - \frac{-2ab_0 + b_0 + b_1}{m_1 + m_2\alpha^2}$	$\sigma_3 = -\frac{b_1 + b_0}{m_1}, \quad \sigma_4 = -\frac{b_2 + b_0}{m_2}.$
2	$b_1 = 0, b_2 = 0$		$\sigma(\alpha) = -\frac{b_0(\alpha - 1)^2}{m_1 + m_2\alpha^2}$	$\sigma_3 = -\frac{b_0}{m_1}, \quad \sigma_4 = -\frac{b_0}{m_2}$

3	$b_1 = b_2 = b_0 = b$ $, m_1 = m_2 = m$		$\sigma(\alpha) =$ $= -\frac{2b(\alpha^2 - \alpha + 1)}{m(1 + \alpha^2)}$	$\sigma_3 = -\frac{2b}{m}, \sigma_4 = -\frac{2b}{m}$
4	$b_2 = 0,$ $m_1 = m_2 = m$		$\sigma(\alpha) =$ $= -\frac{b\alpha^2 - 2\alpha + 2}{m(1 + \alpha^2)}$	$\sigma_3 = -\frac{2b}{m}, \sigma_4 = -\frac{b}{m}$
5	$b_0 = 0$		$\sigma(\alpha) =$ $= -\frac{b_2\alpha^2 + b_1}{m_1 + m_2\alpha^2}$	$\sigma_3 = -\frac{b_1}{m_1}, \sigma_4 = -\frac{b_2}{m_2}$

Следует отметить, что к свойствам функций демпфирования можно отнести особенности проявления свойств симметрии, выражаемых в терминах четности. К примеру, представленный вариант 5 отражает вид функции демпфирования для вырождающейся диссипативной связи между массоинерционными элементами, что, можно полагать, проявляется в свойстве осевой симметрии функции демпфирования.

В таблице 1 приведены сводные данные для рассмотренных вариантов механических систем, совершающих затухающие движения.

Заключение. По результатам представленных исследований возможны следующие выводы.

1. Предложен и разработан метод построения функции демпфирования, отражающей особенности распределения коэффициентов затухания собственных движений в зависимости от коэффициента связности форм. Функция демпфирования построена на основе алгебраических методов, применяемых к системе дифференциальных уравнений движения механической системы, вызванного начальными условиями.

2. Показано, что построенная функция демпфирования аналогична по своим свойствам частотной энергетической функции, определенной в рамках методов структурного математического моделирования. В качестве свойств, отображающих аналогию между функцией демпфирования и частотной функций, рассматривается достижение обеими функциями экстремальных значений, совпадающих с характеристиками свободных движений механической системы. Если в случае с частотными функциями такими характеристиками являются частоты собственных гармонических форм колебаний, то в случае с функциями демпфирования экстремумы совпадают с коэффициентами затухания свободных движений в виде экспоненциальных форм.

3. Разработан метод построения энергетической функции затухания для оценки особенностей динамических свойств механических систем с диссипацией, отображающих свойства связности форм аperiodических движений элементов.

4. Установлена зависимость распределения коэффициентов форм, определяющих экстремальные значения функции демпфирования, от характеристик демпфирующих элементов, соединяющих массоинерционные элементы системы: проведено численное моделирование.

5. Предложенный матричный метод построения функции демпфирования для диссипативной аperiodической системы с двумя степенями свободы может быть распространен на механические колебательные системы с элементами диссипации энергии движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елисеев А. В. Динамика машин. Системные представления, структурные схемы и связи элементов: монография /А. В. Елисеев, Н. К. Кузнецов, А. О. Московских. // Москва: Инновационное машиностроение. 2019. 381 с.
2. Елисеев С. В. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем / Елисеев С. В., Артюнин А. И.- Наука, Новосибирск. 2016. с. 459
3. Елисеев С.В. О возможностях использования дополнительных связей инерционного типа в задачах динамики технических систем / Елисеев С.В., Кузнецов Н.К., Большаков Р.С., Нгуен Д.Х. // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2016. № 5 (112). С. 19-36.
4. Елисеев С.В. Определение частот собственных колебаний механических колебательных систем: особенности использования частотной энергетической функции. Часть I. / Елисеев С.В., Большаков Р.С., Нгуен Д.Х., Выонг К.Ч. // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2016. № 6 (113). С. 26-33.
5. Елисеев С.В. Определение частот собственных колебаний механических колебательных систем: особенности использования частотной энергетической функции. Часть II. / Елисеев С.В., Большаков Р.С., Нгуен Д.Х., Выонг К.Ч. // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2016. № 7 (114). С. 10-23.
6. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): монография / С.В. Елисеев; отв. ред. А.И. Артюнин. Иркутск: ИрГУПС. 2018. 692 с.
7. Стретт Дж. В. Теория звука. М.: ГИТТЛ. 1955. Т. 1. 503 с.
8. Хоменко А.П. Развитие энергетического метода определения частот свободных колебаний механических систем / Хоменко А.П., Елисеев С.В. // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 1 (49). С. 8-19.
9. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press. 2000. 957 p.
10. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing. Cham. 2020. 521 p.
11. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland. 2016. 708 p.

**CONNECTIVITY OF MOVEMENTS IN SYSTEMS WITH ENERGY DISSIPATION:
SYSTEM APPROACHES**

Andrey V. Eliseev

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics,
Irkutsk State Transport University,
664074, Irkutsk, 15 Chernyshevsky st., e-mail: eavsh@ya.ru.

Abstract. This article develops new approaches to the formation of a methodological basis in technologies for evaluating the properties of mechanical dissipative structures using examples of mechanical systems with concentrated parameters that are used as calculation schemes for technical objects of technological and transport purposes. Features of the formation of States in the interactions of elements of mechanical systems are considered. Methods are proposed for evaluating the properties of mechanical systems based on characteristics that depend on the coefficients of partial block motion forms in the free motion mode.

The concept of the damping function is introduced, which reflects the features of the ratio of kinetic energy and its scattering function. In the application to mechanical systems with two degrees of freedom, an algebraic method is proposed and developed for constructing the corresponding damping function that depends on the connectivity coefficient and reflects the dynamic features of the mechanical system. Model examples show that the constructed damping function has a number of extreme properties similar to those considered for frequency energy functions used in structural mathematical modeling methods. An original method for constructing the damping function for evaluating the features of the dynamic properties of mechanical systems with energy dissipation is developed, which displays the properties of connectivity of free motion forms caused by initial conditions. The dependence between the characteristic of damping elements and the distribution of form coefficients that determine the extreme values of the damping function is established. A number of forms of damping functions for various variants of mechanical systems are considered, including limit parameters that determine the degree of connectivity of the movement of mass-inertia elements of the system. The results of the solution are presented using model examples.

Keyword. Mechanical system with dissipation, dynamic connections, energy frequency function, damping function, system approach, connectivity of element movement, extreme properties

References

1. Eliseev A.V., Kuznecov N. K., Moskovskih A. O. Dinamika mashin. Sistemnye predstavlenija, strukturnye shemy i svjazi jelementov [Dynamics of machines. System representations, structural schemes and connections of elements]. Moskva: Innovacionnoe mashinostroenie = Innovative engineering. 2019. 381 p.
2. Eliseev S. V., Artjunin A. I. Prikladnaja teorija kolebanij v zadachah dinamiki linejnyh mehanicheskikh sistem [Applied theory of vibrations in problems of dynamics of linear mechanical systems]. Novosibirsk: Nauka = Science. 2016. 459 p.

3. Eliseev S.V., Kuznecov N.K., Bol'shakov R.S., Nguen D.H. O vozmozhnostjakh ispol'zovanija dopolnitel'nyh svjazej inercionnogo tipa v zadachah dinamiki tehniceskikh system [On the possibilities of using additional inertial type connections in problems of dynamics of technical systems] Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tehniceskogo universiteta = Bulletin of the Irkutsk State Technical University. 2016. № 5 (112). Pp. 19-36.
4. Eliseev S.V., Bol'shakov R.S., Nguen D.H., Vyong K.Ch. Opredelenie chastot sobstvennyh kolebanij mehanicheskikh kolebatel'nyh sistem: osobennosti ispol'zovanija chastotnoj jenergeticheskoj funkcii. Chast' I. [Determination of natural oscillation frequencies of mechanical oscillatory systems: features of using the frequency energy function. Part I.] Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tehniceskogo universiteta = Bulletin of the Irkutsk State Technical University. 2016. № 6 (113). Pp. 26-33.
5. Eliseev S.V., Bol'shakov R.S., Nguen D.H., Vyong K.Ch. Opredelenie chastot sobstvennyh kolebanij mehanicheskikh kolebatel'nyh sistem: osobennosti ispol'zovanija chastotnoj jenergeticheskoj funkcii. Chast' II [Determination of natural oscillation frequencies of mechanical oscillatory systems: features of using the frequency energy function. Part II]. Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tehniceskogo universiteta = Bulletin of the Irkutsk State Technical University. 2016. № 7 (114). Pp. 10-23.
6. Eliseev S.V. Prikladnoj sistemnyj analiz i strukturnoe matematicheskoe modelirovanie (dinamika transportnyh i tehnologicheskikh mashin: svjaznost' dvizhenij, vibracionnye vzaimodejstvija, rynchazhnye svjazi) [Applied system analysis and structural mathematical modeling (dynamics of transport and technological machines: connectivity of movements, vibration interactions, lever connections)] Irkutsk: IrGUPS = Irkutsk State Transport University. 2018. 692 p.
7. Strett Dzh. V. Teorija zvuka [Theory of sound]. M.: GITTL = State publishing house of technical and theoretical literature. 1955. T. 1. 503 p.
8. Homenko A.P., Eliseev S.V. Razvitie jenergeticheskogo metoda opredelenija chastot svobodnyh kolebanij mehanicheskikh sistem [Development of the energy method for determining the frequencies of free vibrations of mechanical systems] Sovremennye tehnologii. Sistemnyj analiz. Modelirovanie = Modern technologies. System analysis. Modeling. 2016. № 1 (49). Pp. 8-19.
9. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press. 2000. 957 p.
10. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing. Cham. 2020. 521 p.
11. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland. 2016. 708 p.