

**АНАЛИЗАТОРЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ  
АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПИ-РЕГУЛЯТОРОМ  
С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ  
ЛИНИИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ**

**Куликов Владимир Валерьевич**

аспирант, e-mail: [godefired@mail.ru](mailto:godefired@mail.ru),

**Куцкий Николай Николаевич**

д.т.н., профессор, Институт информационных технологий и анализа данных,

e-mail: [kucyinn@mail.ru](mailto:kucyinn@mail.ru),

Иркутский национальный исследовательский технический университет,

664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова 83.

**Аннотация.** Для повышения качества переходных процессов в автоматических системах с запаздыванием, превышающим по значению наибольшее из постоянных времени объекта, используют переключение параметров в ПИ-регуляторе (РПС). Одной из задач, возникающих при промышленной реализации РПС, является определение оптимальных настраиваемых параметров, доставляющих экстремальное значение принятому критерию оптимальности. Так как используется РПС и рассматривается объект с запаздыванием, то использование аналитических подходов для его настройки затруднительно. Это приводит к необходимости применения алгоритмических методов. В основе предлагаемого алгоритма используется градиентная процедура, в которой составляющие градиента вычисляются с помощью функций чувствительности с их известными преимуществами. В данной работе формируются анализаторы чувствительности, которые могут быть основой алгоритмов автоматической параметрической оптимизации (АПО), вычисляющих, исходя из минимума критерия интегрального вида, оптимальный вектор настройки рассматриваемого ПИ-регулятора.

**Ключевые слова:** ПИ-регулятор, анализатор чувствительности, система с переменной структурой, линия переключения, запаздывание, дискретная система, параметрический синтез

**Цитирование:** Куликов В. В., Куцкий Н. Н. Анализаторы чувствительности автоматических систем с пи-регулятором с переменными параметрами при использовании линии переключения // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2020. № 3 (19). С. 57-64. DOI: 10.38028/ESI.2020.19.3.006.

**Введение.** При синтезе автоматических систем управления объектом с запаздыванием часто используются различные варианты реализации регулятора Смита [9-15], но, как известно, на качество работы таких регуляторов значительно влияет параметрическое несоответствие модели реальному объекту. В статье рассматривается ПИ-регулятор,

относящийся к классу регуляторов с переменной структурой, который позволяет повысить качество переходных процессов в рассматриваемых системах [1-3].

Наличие переключения в исследуемом ПИ-регуляторе позволяет отнести такие автоматические системы к дискретным, что усложняет применение аналитических подходов для получения значений его настроечных параметров. Этот факт обуславливает выбор исследователями приближённых методов, что, в конечном итоге, не позволяет полностью использовать преимущество ПИ-регулятора с переменными параметрами и приводит к необходимости применения алгоритмических методов, в основе которых лежит градиентная процедура. Тем самым необходимы вычисления функций чувствительности, и наиболее распространены методы, имеющие в своей основе сложные модели чувствительности, которые принято называть анализаторами чувствительности [4].

В статье представлена методика построения анализаторов чувствительности на примере одноконтурной автоматической системы управления объектом с большим запаздыванием при использовании РПС.

**1. Постановка задачи.** Структурная схема рассматриваемой автоматической системы представлена на рис.1.

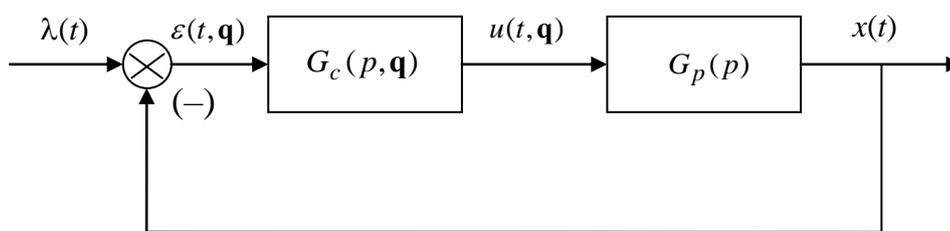


Рис. 1. Структурная схема автоматической системы

Процессы, протекающие в автоматической системе с выбранным РПС при использовании линии переключения, можно описать следующим образом [1-3,7]:

$$\varepsilon(t, \mathbf{q}) = \lambda(t) - x(t),$$

$$u(t, \mathbf{q}) = \begin{cases} u_1(t, \mathbf{q}) = \varepsilon(t, \mathbf{q})G_c(p, \mathbf{q}^1) & \text{при } \Psi(t, \mathbf{q}^2) > 0; \\ u_2(t, \mathbf{q}) = \varepsilon(t, \mathbf{q})G_c(p, \mathbf{q}^3) & \text{при } \Psi(t, \mathbf{q}^2) < 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$x(t) = G_p(p)u(t, \mathbf{q}),$$

где  $\varepsilon(t, \mathbf{q})$  – ошибка системы управления;  $\Psi(t, \mathbf{q}^2) = \varepsilon(t, \mathbf{q})(q_5\varepsilon(t, \mathbf{q}) + \dot{\varepsilon}(t, \mathbf{q}))$  – функция переключения (при  $q_5\varepsilon(t, \mathbf{q}) + \dot{\varepsilon}(t, \mathbf{q}) = 0$  происходит смена параметров регулятора) [2, 5, 6];  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}^1(q_1, q_2), \mathbf{q}^2(q_5), \mathbf{q}^3(q_3, q_4))$  – вектор настраиваемых параметров;  $\lambda(t)$  – задающее воздействие;  $u(t, \mathbf{q})$  – воздействие регулятора;  $x(t)$  – выходная координата автоматической системы (САУ);  $G_c(p, \mathbf{q}^1), G_c(p, \mathbf{q}^3)$  – оператор типового ПИ-регулятора с переменными параметрами;  $G_p(p)$  – оператор объекта;  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования.

Оператором объекта  $G_p(p)$  выбрано апериодическое звено второго порядка с запаздыванием, с помощью которого можно описать процессы значительного количества промышленных объектов:

$$G_p(p) = \frac{k_{ob}}{(T_{ob1}p + 1)(T_{ob2}p + 1)} e^{-\tau_{ob}p}, \quad (2)$$

где  $k_{ob}$  – статический коэффициент усиления;  $T_{ob1}$ ,  $T_{ob2}$  – постоянные времени;  $\tau_{ob}$  – время запаздывания. При этом рассматриваются объекты с большим запаздыванием, для которых выполняется условие

$$\frac{\tau_{ob}}{T_{ob\max}} > 1. \quad (3)$$

Перепишем выражение  $u(t, \mathbf{q})$  с указанием структур типового ПИ-регулятора :

$$u(t, \mathbf{q}) = \begin{cases} u_1(t, \mathbf{q}) = \varepsilon(t, \mathbf{q})(q_1 + \frac{q_2}{p}) \text{ при } \Psi(t, \mathbf{q}^2) > 0; \\ u_2(t, \mathbf{q}) = \varepsilon(t, \mathbf{q})(q_3 + \frac{q_4}{p}) \text{ при } \Psi(t, \mathbf{q}^2) < 0. \end{cases} \quad (4)$$

В качестве оценки переходного процесса системы (1) используется критерий интегрального вида:

$$I = \int_0^L F(\varepsilon(t, \mathbf{q})) dt, \quad (5)$$

где  $L$  – верхняя граница интервала интегрирования, определяемая исходя из длительности переходного процесса в исследуемой САУ;  $F$  – выпуклая положительно определяемая функция.

**2. Построение анализаторов чувствительности.** Как было сказано выше, основу алгоритма АПО составляет градиентная процедура и значит, необходимо вычислять составляющие градиента критерия оптимизации. Эти вычисления осуществляются с привлечение анализаторов чувствительности, сформированных на основе уравнений чувствительности, которые в общем случае для дискретных САУ, и, в частности, для рассматриваемой системы с переменной структурой имеют вид [4,8]:

$$\xi_j(t) = G_p(p) \frac{Du(t, \mathbf{q})}{\partial q_j} = G_p(p) \frac{\partial u(t, \mathbf{q})}{\partial q_j} - \sum_k \Delta u_{t_k} \frac{\partial t_k}{\partial q_j} \delta(t - t_k) G_p(p), \quad (6)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, 5),$$

где  $\frac{D}{\partial q_j}$  – символ обобщённого дифференцирования;  $\Delta u_{t_k}$  – величина скачка управляющего

воздействия в момент его разрыва  $t_k$ ;  $\delta(t - t_k)$  – дельта-функция, смещенная на время  $t_k$ .

Составляющая функций чувствительности, определяемая выражением

$$G_p(p) \frac{\partial u(t, \mathbf{q})}{\partial q_j} \quad (7)$$

представляет собой выходную координату оператора объекта, на входе которого подаются значения производных  $\frac{\partial u_1(t, \mathbf{q})}{\partial q_j}, \frac{\partial u_2(t, \mathbf{q})}{\partial q_j}$ , переключаемые в соответствии с заданной функцией переключения  $\Psi(t, \mathbf{q}^2)$  структур ПИ-регулятора в САУ.

В соответствии с выражением (4)  $\frac{\partial u(t, \mathbf{q})}{\partial q_j}$  определяется как

$$\frac{\partial u(t, \mathbf{q})}{\partial q_1} = \begin{cases} \frac{\partial u_1(t, \mathbf{q})}{\partial q_1} = \varepsilon(t, \mathbf{q}) - \xi_1(t)G_c(p, \mathbf{q}^1) \text{ при } \Psi(t, \mathbf{q}^2) > 0; \\ \frac{\partial u_2(t, \mathbf{q})}{\partial q_1} = -\xi_1(t)G_c(p, \mathbf{q}^3) \text{ при } \Psi(t, \mathbf{q}^2) < 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial u(t, \mathbf{q})}{\partial q_2} = \begin{cases} \frac{\partial u_1(t, \mathbf{q})}{\partial q_2} = \frac{1}{p} \varepsilon(t, \mathbf{q}) - \xi_2(t)G_c(p, \mathbf{q}^1) \text{ при } \Psi(t, \mathbf{q}^2) > 0; \\ \frac{\partial u_2(t, \mathbf{q})}{\partial q_2} = \frac{1}{p} 0(t) - \xi_2(t)G_c(p, \mathbf{q}^3) \text{ при } \Psi(t, \mathbf{q}^2) < 0. \end{cases} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u(t, \mathbf{q})}{\partial q_3} = \begin{cases} \frac{\partial u_1(t, \mathbf{q})}{\partial q_3} = -\xi_3(t)G_c(p, \mathbf{q}^1) \text{ при } \Psi(t, \mathbf{q}^2) > 0; \\ \frac{\partial u_2(t, \mathbf{q})}{\partial q_3} = \varepsilon(t, \bar{q}) - \xi_3(t)G_c(p, \mathbf{q}^3) \text{ при } \Psi(t, \mathbf{q}^2) < 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial u(t, \mathbf{q})}{\partial q_4} = \begin{cases} \frac{\partial u_1(t, \mathbf{q})}{\partial q_4} = \frac{1}{p} 0(t) - \xi_4(t)G_c(p, \mathbf{q}^1) \text{ при } \Psi(t, \mathbf{q}^2) > 0; \\ \frac{\partial u_2(t, \mathbf{q})}{\partial q_4} = \frac{1}{p} \varepsilon(t, \mathbf{q}) - \xi_4(t)G_c(p, \mathbf{q}^3) \text{ при } \Psi(t, \mathbf{q}^2) < 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial u(t, \mathbf{q})}{\partial q_5} = \begin{cases} \frac{\partial u_1(t, \mathbf{q})}{\partial q_5} = -\xi_5(t)G_c(p, \mathbf{q}^1) \text{ при } \Psi(t, \mathbf{q}^2) > 0; \\ \frac{\partial u_2(t, \mathbf{q})}{\partial q_5} = -\xi_5(t)G_c(p, \mathbf{q}^3) \text{ при } \Psi(t, \mathbf{q}^2) < 0. \end{cases}$$

Производная  $\frac{\partial t_k}{\partial q_j}$  определяется из условия переключения структур ПИ-регулятора в

виде:

$$\Psi(\varepsilon(t_k, \mathbf{q}), t_k(\mathbf{q}), \mathbf{q}) = 0. \quad (9)$$

Дифференцируя условие (9) по неявной переменной  $q_j$ , получим:

$$\Psi'_\varepsilon \left[ \dot{\varepsilon}(t_k) \frac{dt_k}{dq_j} + \frac{\partial \varepsilon(t_k)}{\partial q_j} \right] + \Psi'_{t_k} \frac{dt_k}{dq_j} + \Psi'_{q_j} = 0, (j=1, 2, \dots, 5). \quad (10)$$

Выразим  $\frac{\partial t_k}{\partial q_j}$  из уравнения (10) с заменой  $\frac{\partial \varepsilon(t_k)}{\partial q_j}$  на  $\xi_j(t_k)$ :

$$\frac{dt_k}{dq_j} = -\frac{\Psi'_\varepsilon \xi_j(t_k) + \Psi'_{q_j}}{\Psi'_\varepsilon \dot{\varepsilon}(t_k) + \Psi'_{t_k}}. \quad (11)$$

Представим выражения для вычисления  $\Psi'_\varepsilon, \Psi'_{t_k}, \Psi'_{q_i}$ :

$$\Psi'_\varepsilon = 1(\varepsilon(t, \mathbf{q})q_5 + \dot{\varepsilon}(t, \mathbf{q})) + \varepsilon(t, \mathbf{q})(q_5 + \frac{\partial \dot{\varepsilon}(t, \mathbf{q})}{\partial \varepsilon(t, \mathbf{q})}). \quad (12)$$

$$\Psi'_{t_k} = \dot{\varepsilon}(t_k, \mathbf{q})(\varepsilon(t, \mathbf{q})q_5 + \dot{\varepsilon}(t, \mathbf{q})) + \varepsilon(t, \mathbf{q})(q_5 \dot{\varepsilon}(t_k, \mathbf{q}) + \frac{\partial \dot{\varepsilon}(t_k, \mathbf{q})}{\partial t_k}). \quad (13)$$

$$\Psi'_{q_1} = -(\xi_1(t)(\varepsilon(t, \mathbf{q})q_5 + \dot{\varepsilon}(t, \mathbf{q})) + \varepsilon(t, \mathbf{q})(\xi_1(t)q_5 + \dot{\xi}_1(t))). \quad (14)$$

$$\Psi'_{q_2} = -(\xi_2(t)(\varepsilon(t, \mathbf{q})q_5 + \dot{\varepsilon}(t, \mathbf{q})) + \varepsilon(t, \mathbf{q})(\xi_2(t)q_5 + \dot{\xi}_2(t))). \quad (15)$$

$$\Psi'_{q_3} = -(\xi_3(t)(\varepsilon(t, \mathbf{q})q_5 + \dot{\varepsilon}(t, \mathbf{q})) + \varepsilon(t, \mathbf{q})(\xi_3(t)q_5 + \dot{\xi}_3(t))). \quad (16)$$

$$\Psi'_{q_4} = -(\xi_4(t)(\varepsilon(t, \mathbf{q})q_5 + \dot{\varepsilon}(t, \mathbf{q})) + \varepsilon(t, \mathbf{q})(\xi_4(t)q_5 + \dot{\xi}_4(t))). \quad (17)$$

$$\Psi'_{q_5} = -(\xi_5(t)(\varepsilon(t, \mathbf{q})q_5 + \dot{\varepsilon}(t, \mathbf{q})) + \varepsilon(t, \mathbf{q})(\xi_5(t)q_5 - \varepsilon(t, \mathbf{q}) + \dot{\xi}_5(t))). \quad (18)$$

Полученные выше выражения позволяют сформировать структурную схему анализаторов чувствительности:

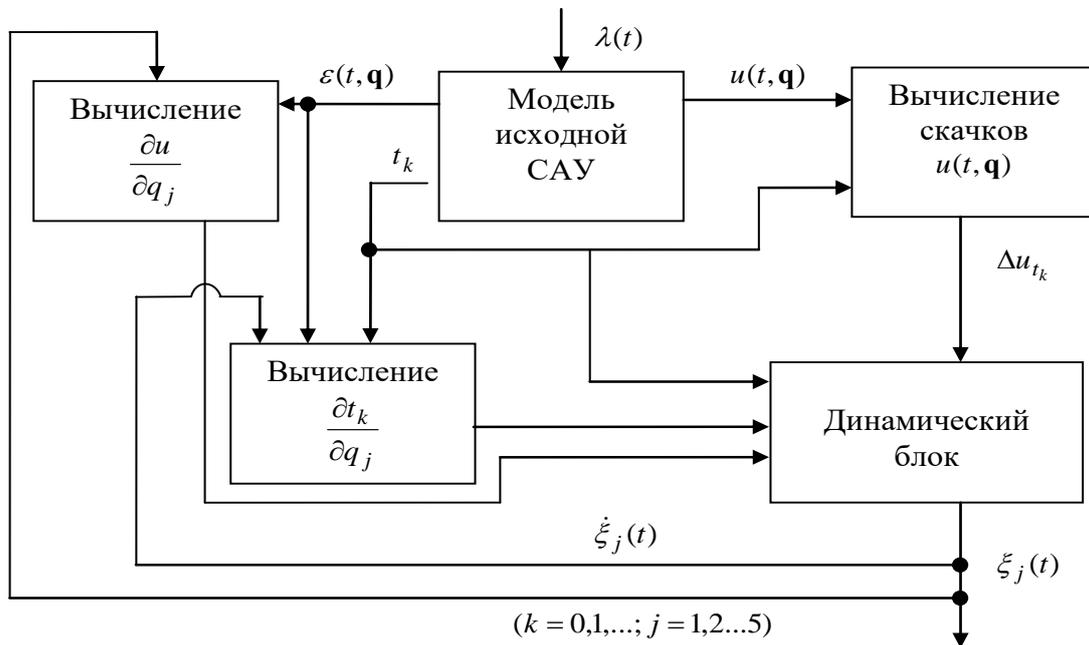


Рис. 2. Структурная схема анализаторов чувствительности

**Заключение.** В настоящей работе получена структурная схема анализаторов чувствительности, что позволяет перейти к этапу реализации градиентного алгоритма параметрической оптимизации регулятора (4) в исследуемой системе (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Говоров А.А. Зонные регуляторы с переменной структурой. Принципы построения, методы анализа и способы реализации. Саарбрюккен: LAP Lambert Academic Publishing, 2014. 124 с.
2. Говоров А.А. Методы и средства построения регуляторов с расширенными функциональными возможностями для непрерывных технологических процессов: дис. д-ра техн. наук: 05.13.06. Москва. 2002. 499 с.
3. Говоров А.А., Баженов В.И. Зонные регуляторы с переменной структурой // Вести высших учебных заведений Черноземья. 2015. № 1. С. 41-47.
4. Городецкий В.И., Захарин Ф.М., Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Методы теории чувствительности в автоматическом управлении. Л.: Энергия. Ленинградское отделение. 1971. 344 с.
5. Девятов М.А., Тележин В.Ф. Синтез нелинейных систем управления по структуре фазовых пространств. Методы и алгоритмы анализа и синтеза систем управления с переменной структурой. Саарбрюккен: LAP Lambert Academic Publishing. 2015. 144 с.
6. Дыда А.А., Маркин В.Е. Системы управления с переменной структурой с парными и нелинейно деформируемыми поверхностями переключения // Проблемы управления. 2005. № 1. С. 22-25.
7. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука. 1967. 336 с.
8. Куцый Н.Н. Автоматическая параметрическая оптимизация дискретных систем регулирования: дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.06. Иркутск. 1997. 382 с.
9. D. Shinde, S. Hamde and L. Waghmare, "Nonlinear predictive proportional integral controller for multiple time constants", International Journal of Innovative Research in Advanced Engineering, 2014. vol.1. issue 7. Pp.53-58.
10. G. Prakash and V. Alamelumangai, "Design of predictive fractional order PI controller for the quadruple tank process", WSEAS Transactions on Systems and Control. 2015. vol. 10. Pp.85-94.
11. P. Airikka, "Another novel modification of predictive PI controller for processes with long dead time", IFAC Conference on Advances in PID Control, Brescia, Italy, 5 pages, 2012.
12. P. Airikka, "Stability analysis of a predictive PI controller", 21st Mediterranean Conference on Control and Automation. 2013. Pp.1380-1385.
13. P. Airikka, "Robust predictive PI controller tuning", 19th World Congress, IFAC, Cape Town, South Africa. 2014. Pp. 9301-9306.
14. P. Larsson and T. Hagglund, "Comparison between robust PID and predictive PI controllers with constrained control signal noise sensitivity", 2nd IFAC Control Conference on Advances on PID Control, Brescia, Italy. 2012. Pp.175-180.
15. R. Villafuerte, S. Mondié, R. Garrido, Tuning of Proportional Retarded Controllers: Theory and experiments, IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2013. Pp. 983-990.

UDK 519.711.2

**SENSITIVITY ANALYZERS  
AUTOMATIC SYSTEMS WITH PI CONTROL  
WITH VARIABLE PARAMETERS WHEN USE  
SWITCHING LINES**

**Vladimir V. Kulikov**

Postgraduate student, e-mail: [godefired@mail.ru](mailto:godefired@mail.ru),

**Nikolay N. Kutsy**

Doctor of Technical Sciences, Professor,  
Institute of Information Technology and Data Analysis,

e-mail: [y20@istu.edu](mailto:y20@istu.edu),

Irkutsk National Research Technical University,  
str. Lermontov, 83, 664074, Irkutsk.

**Abstract.** To improve the quality of transient processes in automatic systems with a lag exceeding the largest of the object's time constants, parameter switching in the PI controller (RPC) is used. One of the problems arising in the industrial implementation of the RPS is to determine the optimal tunable parameters that deliver the extreme value to the adopted optimality criterion. Since the RPS is used and an object with a delay is considered, it is difficult to use analytical approaches to adjust it. This leads to the use of algorithmic methods. The proposed algorithm is based on a gradient procedure, in which the components of the gradient are calculated using the sensitivity functions with their known advantages. In this work, sensitivity analyzers are formed, which can be the basis of algorithms for automatic parametric optimization (APO), calculating, based on the minimum of an integral type criterion, the optimal tuning vector of the considered PI controller.

**Keywords:** PI control, sensitivity analyzer, system with variable structure, switching line, delay, discrete system, parametric synthesis

**References**

1. Govorov A.A. Zonnye regulatory s peremennoy strukturoy. Printsipy postroeniya, metody analiza i sposoby realizatsii [Zone regulators with variable structure. Construction principles, analysis methods, and implementation methods]. Saarbruecken: LAP Lambert Academic Publishing. 2014. 124 p. (in Russian).
2. Govorov A.A. Metody i sredstva postroeniya regulyatorov s rasshirennymi funktsional'nymi voz-mozhnostyami dlya nepreryvnykh tekhnologicheskikh processov [Methods and tools for constructing regulators with extended functional capabilities for continuous technological processes]: dis. ... Dr. Tech. Sciences: 05.13.06. Moscow. 2002. 499 p. (in Russian)
3. Govorov A.A., Bazhenov V.I. Zonnye regulatory s peremennoy strukturoy [Zone regulators with variable structure] // News of higher educational institutions of the Chernozem region. Publishing house Lipetsk state technical University. 2015. № 1. С. 41-47. (in Russian).

4. Gorodeckij V.I., Zaharin F.M., Rozenvasser E.N., Yusupov R.M. *Metody teorii chuvstvitel'nosti v avtomaticheskom upravlenii* [Methods of the theory of sensitivity in automatic control]. L.: Energy = Leningrad: Energy. Leningrad branch. 1971. 343 p. (in Russian).
5. Devyatov M.A., Telezhin V.F. *Sintez nelineynykh sistem upravleniya po strukture fazovykh prostranstv. Metody i algoritmy analiza i sinteza sistem upravleniya s peremennoy strukturoy* [Synthesis of nonlinear control systems based on the structure of phase spaces. Methods and algorithms for analysis and synthesis of control systems with variable structure]. Saarbruecken: LAP Lambert Academic Publishing. 2015. 144 c.
6. Dyda A.A., Markin V.E. *Sistemy upravleniya s peremennoy strukturoy s parnymi i nelineyno deformiruemyimi poverkhnostyami pereklyucheniya* [Variable structure control systems with paired and nonlinearly deformable switching surfaces] // *Control sciences*. Publishing house V.A. Trapeznikov institute of control sciences of RAS. 2005. № 1. Pp. 22-25. (in Russian).
7. Emelyanov S.V. *Sistemy avtomaticheskogo upravleniya s peremennoj strukturoy* [Automatic control systems with variable structure]. M.: Nauka = Moscow: Nauka. 1967. 336 p. (in Russian).
8. Kutsy N.N. *Avtomaticheskaya parametricheskaya optimizatsiya diskretnykh sistem regulirovaniya* [Automatic parametric optimization of discrete control systems]: dis. ... Dr. Tech. Sciences: 05.13.06: Irkutsk. 1997. 382 p. (in Russian)
9. D. Shinde, S. Hamde and L. Waghmare, "Nonlinear predictive proportional integral controller for multiple time constants", *International Journal of Innovative Research in Advanced Engineering*. 2014. vol.1. issue 7. Pp.53-58.
10. G. Prakash and V. Alamelumangai, "Design of predictive fractional order PI controller for the quadruple tank process", *WSEAS Transactions on Systems and Control*. 2015. vol. 10. Pp.85-94.
11. P. Airikka, "Another novel modification of predictive PI controller for processes with long dead time", *IFAC Conference on Advances in PID Control*, Brescia, Italy, 5 pages, 2012.
12. P. Airikka, "Stability analysis of a predictive PI controller", *21st Mediterranean Conference on Control and Automation*. 2013. Pp. 1380-1385.
13. P. Airikka, "Robust predictive PI controller tuning", *19th World Congress, IFAC*, Cape Town, South Africa. 2014. Pp. 9301-9306.
14. P. Larsson and T. Hagglund, "Comparison between robust PID and predictive PI controllers with constrained control signal noise sensitivity", *2nd IFAC Control Conference on Advances on PID Control*, Brescia, Italy. 2012. Pp. 175-180.
15. R. Villafuerte, S. Mondié, R. Garrido, *Tuning of Proportional Retarded Controllers: Theory and experiments*, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 2013. Pp. 983-990.