

Алгоритмы трехмерного моделирования электронно-оптической системы гиротронов, используемые в программе ANGEL-TA-S3D

Семенов Евгений Сергеевич

Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН,

Россия, Нижний Новгород, semes@ipfran.ru

Аннотация. Статья посвящена описанию математических методов, используемых для расчёта азимутально-несимметричного электрического поля для траекторного анализа электронных пучков в гироприборах. Эти алгоритмы, включая модификации метода дискретных источников, реализованные в комплексе программ ANGEL, показали высокую точность и эффективность работы при проектировании пушек и коллекторов гиротронов.

Ключевые слова: электронная оптика, гиротрон, метод дискретных источников, метод трубок тока, уравнение Пуассона

Цитирование: Семенов Е.С. Алгоритмы трехмерного моделирования электронно-оптической системы гиротронов, используемые в программе ANGEL-TA-S3D / Е.С. Семенов // Информационные и математические технологии в науке и управлении, 2025. – № 3 (39). – С. 164-176. – DOI:10.25729/ESI.2025.39.3.014.

Введение. Электронно-оптическая система (ЭОС) формирования винтовых электронных пучков является одной из ключевых подсистем гиротрона [1, 2]. Повышенные требования к эффективности и надежности работы гиротронов определяют необходимость учета в расчетах ЭОС таких явлений, как азимутальная неоднородность эмиссии (связанная с неравномерным подогревом эмиттера), несоосность и перекося силовых полей [3, 4].

Традиционные алгоритмы анализа ЭОС на базе трубок тока [5–8] легли в основу программного комплекса ANGEL (ANalyzer of a Gyration Electrons), разработка которого ведётся в ИПФ РАН [9]. Данный программный комплекс позволяет рассчитывать траектории электронов в статическом электромагнитном поле в режиме температурного ограничения эмиссии с учётом начального скоростного разброса и пространственного заряда пучка.

При расчёте характеристик электронного пучка (траекторном анализе) наиболее сложным элементом является вычисление напряжённости электрического поля, поэтому основное внимание в данной статье уделено методам расчёта азимутально-несимметричного статического электрического поля. В коммерческих программах электрическое поле обычно рассчитывают такими универсальными методами, как метод конечных элементов (МКЭ), конечных разностей и пр. В этой статье рассмотрены только методы, базирующиеся на граничных интегральных уравнениях, в частности, метод дискретных источников (МДИ) [7, 8], применение которого для траекторного анализа ЭОС гиротронов эффективно по причине малого заполнения электронным пучком межэлектродного пространства, особенно на высоких частотах.

Далее в статье формулируется постановка задачи, описывается идеология МДИ, рассматриваются варианты регуляризации решения задачи, приводятся расчётные схемы МДИ для цилиндрической системы координат и приводится частный случай МДИ для азимутально-симметричной системы. Затем описываются способы учёта пространственного заряда: постановка задачи, адаптация МДИ для решения уравнения Пуассона в азимутально-симметричном и несимметричном случаях с дополнительными модификациями.

1. Метод трубок тока. Моделирование электронных пучков с винтовыми траекториями проводится путем численного решения согласованной системы уравнений движения, уравнения Пуассона и уравнения непрерывности [5]. Плотность объёмного заряда

в рабочей области находится по зарядовому следу пучка электронов с помощью метода трубок тока, традиционно используемого для решения статических задач [6].

Поток электронов разбивается на N_I трубок тока; каждая из них несёт сохраняющийся при движении ток I_k , $k = \overline{1, N_I}$. Интегрирование уравнений движения (2) в найденных электрическом $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{B}$ полях позволяет определить траектории каждой токовой трубки и совокупное распределение плотности пространственного заряда.

Вся рабочая область Ω разбивается на элементарные ячейки Ω_m , $m = \overline{1, M}$. Для простоты организации сетки границы ячеек расположены параллельно координатным осям с постоянным шагом (своим вдоль каждой из осей). Пространственный заряд, вносимый k -ой трубкой в m -ую ячейку сетки, равен $Q_{m,k} = I_k \Delta t$, где Δt – время прохождения траектории частицы через данную ячейку, I_k – ток данной трубки. Несмотря на то, что траектории электронов пересекают ячейки во всевозможных направлениях, заряд, оставляемый ими, приписывается точечному источнику с координатами ξ_m центра ячейки. Полный заряд ячейки Q_m получается суммированием зарядов $Q_{m,k}$ по всем трубкам тока, прошедшим через данную ячейку:

$$Q_m = \sum_{k=1}^{N_I} Q_{m,k}. \quad (1)$$

Следуя [8], для уменьшения времени счёта в программе реализована оптимизация с использованием сетки «укрупнённых зарядов». Для экономии памяти сетка Ω_m покрывает лишь область вокруг силовой линии магнитного поля, выпущенной из эмиттера.

Каждый электрон стартует с эмиттера с заданными координатами $\mathbf{r}_0$, скоростью $\mathbf{v}_0$ и движется под действием силовых полей согласно уравнению движения:

$$\frac{\partial(\gamma \mathbf{v})}{\partial t} = \frac{e_0}{m_0} (\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]), \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \quad \mathbf{v} \Big|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{r} \Big|_{t=0} = \mathbf{r}_0, \quad (2)$$

где $\frac{e_0}{m_0} \approx -1.759 \cdot 10^{11}$ [Кл/кг] – удельный заряд электрона, γ – его релятивистский фактор.

Для интегрирования уравнений движения используются методы Рунге–Кутты 4-го порядка (в т.ч. с модификацией Мерсона, позволяющей контролировать точность на каждом шаге).

Магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$ создаётся системой соленоидов; расчёт поля оптимизирован посредством аналитического вычисления интегралов по радиальной и продольной координатам [10]. Напряжённость электрического поля $\mathbf{E}$ выражается через потенциал U , удовлетворяющий уравнению Пуассона в области, ограниченной электродами с заданными потенциалами U_B , а также уравнению непрерывности тока:

$$\mathbf{E} = -\nabla U, \quad \Delta U = \rho, \quad U \Big|_{\Gamma} = U_B, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (4)$$

где ρ и $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ – плотности пространственного заряда и тока электронного пучка.

Наличие правой части уравнения Пуассона требует, чтобы все электроны двигались в поле, на величину которого влияет само это движение. Требуется несколько последовательных итераций расчёта траекторий электронов и нахождения создаваемого ими пространственного заряда ρ , чтобы получилась стационарная картина. На начальной (нулевой) итерации плотность объемного заряда полагается равной нулю и находится решение уравнения Лапласа (см. п. 2). На следующих итерациях электрическое поле находится из решения уравнения Пуассона (см. п. 3) с плотностью ρ , вычисленной на предыдущей итерации, и затем вновь рассчитываются электронные траектории. Итерации останавливаются, когда изменение плотности пространственного заряда от итерации к итерации становится меньше некоторой заданной величины.

2. Электрическое поле системы электродов. На первом этапе необходимо найти напряжённость электрического поля «холодной системы», в которой поле создаётся набором электродов с приложенными к ним различными потенциалами.

2.1. Постановка задачи. Уравнение Лапласа. Рассмотрим уравнение Лапласа:

$$\Delta U = 0 \quad (5)$$

$$\text{в области:} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Гладкую границу области разобьём на K последовательно идущих участков:

$$\partial\Omega \equiv \Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_K. \quad (7)$$

На каждом k -ом участке ($k = \overline{1, K}$) ставится своё граничное условие: либо Дирихле:

$$U(\eta) = U_k, \quad \eta \in \Gamma_k, \quad (8)$$

либо Неймана:

$$\frac{\partial U(\eta)}{\partial n} = 0, \quad \eta \in \Gamma_k, \quad (9)$$

где ∂n – нормаль к Γ_k в точке η .

Условия Дирихле задают постоянные потенциалы U_k на поверхности металлических электродов, а условия Неймана ставятся в межэлектродных промежутках. В частности, при рассмотрении задачи в цилиндрических координатах в азимутально-симметричном случае на оси z системы ставится условие Неймана:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad r = 0. \quad (10)$$

2.2. Метод дискретных источников (МДИ). Далее рассмотрим вспомогательную область $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, полностью объемлющую область Ω :

$$\Pi \subset \Omega, \quad \partial\Pi \cap \partial\Omega = \emptyset. \quad (11)$$

Гладкая граница $\mathcal{S} \equiv \partial\Pi$ нигде не касается и не пересекает границу Γ .

Ограничимся далее только граничным условием Дирихле (кроме оси $r = 0$, если она является частью границы). Решение задачи (5), (8) в области Ω представим в виде *потенциала простого слоя*:

$$U(\eta) = \int_{\mathcal{S}} G(\eta, \xi) \mu(\xi) d\mathcal{S}. \quad (12)$$

Здесь $\eta \in \bar{\Omega} \equiv \Omega \cup \partial\Omega$ – точки, где требуется вычислить решение; $\xi \in \mathcal{S}$ – точки на границе вспомогательной области, где распределён заряд с [неизвестной] плотностью μ ; $G(\eta, \xi)$ – функция источника, в нашем случае она представляет собой фундаментальное решение уравнения (5) во всём пространстве $\mathbb{R}^n$. Заметим, что G является решением уравнения:

$$\Delta G(\eta - \xi) = \delta(\eta - \xi). \quad (13)$$

Для нахождения неизвестного распределения $\mu(\xi)$, исходя из граничного условия (8) и представления (12), запишем граничное *интегральное уравнение* (ИУ):

$$\int_{\mathcal{S}} G(\eta, \xi) \mu(\xi) d\mathcal{S} = U_B(\eta), \quad \eta \in \Gamma, \quad (14)$$

где $U_B(\eta)$ – заданное распределение потенциала вдоль границы области.

Для численного нахождения распределения $\mu(\xi)$ можно использовать как метод коллокаций (поточечное представление решения), так и метод моментов (представление μ в виде суперпозиции базисных функций с неизвестными коэффициентами, которые отыскиваются посредством решения СЛАУ). Далее остановимся подробнее на *методе коллокаций*.

Разобьём вспомогательную границу $\mathcal{S}$ на N участков с ненулевой длиной:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_N. \quad (15)$$

и введём обозначения:

$$\begin{aligned} \{ \xi_i: \xi_i \in \mathcal{S}_i \}, \quad i = \overline{1, N}, \\ \mu_i = \mu(\xi_i), \end{aligned} \quad (16)$$

где каждая точка ξ_i размещена в центре своего участка $\mathcal{S}_i$.

Тогда интеграл в (12) разбивается на сумму интегралов по участкам:

$$U(\eta) = \sum_{i=1}^N \int_{\mathcal{S}_i} G(\eta, \xi) \mu(\xi) d\mathcal{S}, \quad \xi \in \mathcal{S}_i. \quad (17)$$

Вместо поиска непрерывного распределения будем искать значения $\mu(\xi)$ лишь в точках ξ_i . Неизвестную функцию $\mu(\xi)$ считаем при этом кусочно-постоянной (ступенчатой) со значениями μ_i :

$$\mu(\xi) = \begin{cases} \mu_i, & \xi \in \mathcal{S}_i, \\ & i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (18)$$

В этом случае можно оставить под интегралом лишь ядро:

$$U(\eta) = \sum_{i=1}^N \mu_i \int_{\mathcal{S}_i} G(\eta, \xi) d\mathcal{S}, \quad \xi \in \mathcal{S}_i. \quad (19)$$

Представление (19) можно использовать для нахождения μ_i , вычислив приближённо интегралы по $\mathcal{S}_i$ произвольным численным методом. При предельном упрощении, применяя метод прямоугольников с единственным слагаемым, запишем потенциал в виде:

$$U(\eta) = \sum_{i=1}^N \mu_i \|\mathcal{S}_i\| G(\eta, \xi_i). \quad (20)$$

Обозначим через $Q_i = \mu_i \|\mathcal{S}_i\|$ точечный заряд, сосредоточенный в точке ξ_i , называемый в дальнейшем *дискретный источник*. Тогда из (20) получаем всюду используемое в дальнейшем представление приближённого решения, которое является анзацем Метода дискретных (вспомогательных) источников:

$$U(\eta) = \sum_{i=1}^N Q_i G(\eta, \xi_i). \quad (21)$$

Напряжённость электрического поля в стационарном случае записывается в виде:

$$\mathbf{E} = -\nabla U. \quad (22)$$

Компоненты поля получаются из представления (21) дифференцированием функции источника G по координатным осям:

$$\mathbf{E}(\eta) = -\sum_{i=1}^N Q_i \nabla G(\eta, \xi_i). \quad (23)$$

2.3. Нахождение весов дискретных источников. На границе Γ выберем N точек с ненулевым расстоянием друг от друга:

$$\{\eta_j\} \in \Gamma, \quad j = \overline{1, N}, \quad (24)$$

называемых далее *точками коллокации*. Желательно каждую точку η_j размещать так, чтобы расстояние от неё до соответствующей точки ξ_i было бы минимальным.

Если в этих точках проверить граничное условие (8), пользуясь представлением потенциала в виде (21), получим аппроксимацию интегрального уравнения (14) системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно вектора источников $\{q_i\}$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N Q_i G(\eta_j, \xi_i) = U_B(\eta_j), \\ j = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (25)$$

Каждый элемент квадратной $N \times N$ матрицы $A \equiv \{a_{ji} = G(\eta_j, \xi_i)\}$ формируется независимо от других, что позволяет легко распараллеливать её заполнение.

Для поиска решения СЛАУ можно использовать произвольный метод, способный удерживать точность при больших размерностях (N от 300 до 1500 в двумерных задачах и десятки тысяч – в трёхмерных) и числах обусловленности (типично от 10^5 до 10^{14}). Как правило, явные методы не удовлетворяют этим требованиям, поэтому применяются итерационные, например, методы сопряжённых градиентов, сингулярного разложения матриц (SVD), с использованием подпространств Крылова (GMRES) и др.

Найдя решение $\mathbf{Q} = A^{-1} \mathbf{U}_B$ СЛАУ (25), можно вычислить потенциал в любой точке пространства, пользуясь анзацем (21).

2.4. Выбор координат дискретных источников. При использовании в МДИ поверхности $\mathcal{S}$, объёмлющей область Ω , итоговое решение является гармонической функцией, как суперпозиция гармонических источников G с весами q_i , причём внутри всей

области Π , ограниченной $\mathcal{S}$. Соответственно, поскольку Γ находится целиком внутри Π , решение (21) уравнения (5) тоже должно быть гармоническим на всей Γ . При этом, в граничном условии Дирихле (8) потенциал U_k является заданным, причём кусочно-постоянной функцией.

Таким образом, если на всех участках заданы только условия Дирихле, потенциал на границе не может быть гармоническим; граничные условия (8) можно удовлетворить лишь в некоторых точках границы (в частности, в точках коллокации – по построению), но на всей границе целиком – невозможно. Следовательно, при увеличении $N \rightarrow \infty$, даже если $\|\Gamma_k\| \rightarrow 0$ при всех $k = \overline{1, M}$, получившееся решение $U(\eta)$, $\eta \in \Gamma$ не будет сходиться к функции U_B , определённой граничными условиями (8).

Для решения этой проблемы можно пойти двумя путями:

- чередовать граничные условия Дирихле и Неймана с тем, чтобы на границе не возникал скачок потенциала, обусловленный переходом от участка к участку Γ_k ;
- задавать U_k не постоянной функцией на k -ом участке, а таким образом, чтобы итоговая U_B , составленная из U_k , $k = \overline{1, M}$ была бы на всей Γ следом гармонической функции.

Заметим, что если на границе задано условие Дирихле:

$$U(\eta) = U_B(\eta), \quad \eta \in \Gamma \quad (26)$$

(даже если U_B является следом аналитической функции!), интегральное уравнение (14), соответствующее представлению решения в виде потенциала простого слоя (12), является уравнением Фредгольма I-го рода с ядром G и неизвестной плотностью μ на границе $\mathcal{S}$ вспомогательной области Π . Как известно, задача отыскания решения таких ИУ является некорректной и требуется какая-либо процедура регуляризации.

В этом качестве можно использовать свободный параметр – произвол в выборе формы объёмлющей области Π , а в дискретном случае – произвол в выборе координат дискретных источников. В частности, используется отход границы $\mathcal{S}$, по которой проводится интегрирование (где распределён заряд μ), от границы области Γ , на которой проверяется граничное условие, на некоторое заданное ненулевое расстояние, которое в данном случае и является параметром регуляризации.

На практике граница $\mathcal{S}$ строится «параллельно» границе Γ с некоторым отступом χ . Координаты дискретных источников ξ_i находятся из пересечения нормалей к границе Γ , проведённых через соответствующие точки коллокации η_i . При этом автоматически получается $\|\eta_i - \xi_i\| = \chi$ для всех $i = \overline{1, N}$. Удобно нормировать высоту χ на шаг

$$h_m = \|\eta_i - \eta_{i-1}\| \quad (27)$$

следования дискретных источников; обычно полагается:

$$\chi = w_1 h_m, \quad (28)$$

где относительное расстояние от источника до точки коллокации w_1 является нормированным параметром регуляризации. При $w_1 < 1.2$ число обусловленности матрицы СЛАУ (6.22) уменьшается, но при этом наблюдается «раскачивание» потенциала между точками коллокации; при уходе от границы вглубь рабочей области потенциал «выглаживается» и погрешность его нахождения уменьшается. Однако при $w_1 > 1.8$ число обусловленности матрицы A начинает быстро расти и, соответственно, растёт погрешность нахождения решения СЛАУ q_i , что приводит к ошибке вычисления потенциала U как на границе, так и внутри области Ω .

Увеличение количества точек коллокации с соответствующим пропорциональным уменьшением шага их следования h_m при сохранении относительного расстояния w_1 приводит к увеличению числа обусловленности вследствие увеличения размерности СЛАУ. При этом увеличиваются время и погрешности нахождения решения, тогда как амплитуда

«раскачивания» потенциала между точками коллокации не уменьшается (а зачастую – увеличивается). Для уменьшения этой амплитуды требуется увеличивать w_1 быстрее, чем уменьшать h_m , поэтому при сгущении точек коллокации число обусловленности СЛАУ быстро растёт. Разумный выбор количества точек коллокации N и расстояния w_1 обусловлен как геометрией системы (самые мелкие детали электродов должны быть представлены достаточным количеством точек), так и опытом пользователя.

Заметим, что решение задачи (5), (8) можно искать также в виде потенциала двойного слоя, что приводит к интегральному уравнению Фредгольма II-го рода. Соответствующая матрица СЛАУ обладает очень малым числом обусловленности (порядка 10), но поскольку потенциал двойного слоя терпит разрыв на границе, при любом конечном числе источников наблюдается искажение потенциала при приближении к границе, и ещё большее искажение его градиента (22), что неприемлемо, поскольку электроны стартуют прямо с границы и ошибки в расчёте поля приводят к сильному отклонению их траекторий.

2.5. Общий (азимутально-несимметричный) случай. Рассмотрим уравнение Лапласа (5) в цилиндрической области $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^3$:

$$\Delta U(r, \varphi, z) = 0, \quad (r, \varphi, z) \in \Omega_3, \quad r \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad (29)$$

$$\Delta U \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (30)$$

Считаем, что задано распределение потенциала на границе области Ω_3 :

$$U|_{\Gamma} = U_B(\eta), \quad \eta \in \Gamma, \quad \Gamma = \partial\Omega_3. \quad (31)$$

Потенциал $U(r, \varphi, z)$ в области Ω_3 ищем методом дискретных источников (МДИ) по методике, изложенной выше:

$$U(r, \varphi, z) = \sum_{i_3=1}^{N_3} Q_{i_3}(r_{i_3}, \varphi_{i_3}, z_{i_3}) G_3(r, \varphi, z, r_{i_3}, \varphi_{i_3}, z_{i_3}), \quad (32)$$

где $(r_{i_3}, \varphi_{i_3}, z_{i_3})$ – координаты N_3 штук дискретных источников Q_{i_3} , расположенных вдоль вспомогательной поверхности $\mathcal{S}$, построенной «параллельно» границе Γ .

Компоненты электрического поля (22) с учётом (23) имеют вид:

$$E_r(r, \varphi, z) = - \sum_{i_3=1}^{N_3} Q_{i_3}(r_{i_3}, \varphi_{i_3}, z_{i_3}) \frac{\partial G_3}{\partial r}(r, \varphi, z, r_{i_3}, \varphi_{i_3}, z_{i_3}), \quad (33)$$

$$E_\varphi(r, \varphi, z) = - \sum_{i_3=1}^{N_3} Q_{i_3}(r_{i_3}, \varphi_{i_3}, z_{i_3}) \frac{1}{r} \frac{\partial G_3}{\partial \varphi}(r, \varphi, z, r_{i_3}, \varphi_{i_3}, z_{i_3}), \quad (34)$$

$$E_z(r, \varphi, z) = - \sum_{i_3=1}^{N_3} Q_{i_3}(r_{i_3}, \varphi_{i_3}, z_{i_3}) \frac{\partial G_3}{\partial z}(r, \varphi, z, r_{i_3}, \varphi_{i_3}, z_{i_3}). \quad (35)$$

Функция Грина (источника):

$$G_3(r, \varphi, z, r_0, \varphi_0, z_0) = C_3 \chi_3^{-1/2} \quad (36)$$

имеет физический смысл потенциала, который заряд, сосредоточенный в точке (r_0, φ_0, z_0) , создаёт в точке (r, φ, z) . Здесь:

$$C_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \chi_3 = (z - z_0)^2 + r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (37)$$

Производные функции источника вдоль координатных осей r, φ, z имеют вид:

$$\frac{\partial G_3}{\partial r}(r, \varphi, z, r_0, \varphi_0, z_0) = -C_3 (r - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)) \chi_3^{-\frac{3}{2}}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial \varphi}(r, \varphi, z, r_0, \varphi_0, z_0) = -C_3 r r_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \chi_3^{-3/2}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial z}(r, \varphi, z, r_0, \varphi_0, z_0) = -C_3 (z - z_0) \chi_3^{-3/2}. \quad (40)$$

Величины зарядов Q_{i_3} определяются из СЛАУ, определённой в (25):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i_3=1}^{N_3} Q_{i_3}(r_{i_3}, \varphi_{i_3}, z_{i_3}) G_3(r_j, \varphi_j, z_j, r_{i_3}, \varphi_{i_3}, z_{i_3}) = U_B(r_j, \varphi_j, z_j), \\ j = \overline{1, N_3}. \end{array} \right. \quad (41)$$

где U_B – распределение потенциала (31) вдоль границы области, определяемое для точек коллокации $\eta_j \equiv (r_j, \varphi_j, z_j)$.

2.6. Азимутально-симметричный случай. Рассмотрим уравнение Лапласа (29) в азимутально-симметричном случае:

$$\Delta U(r, z) = 0, \quad (r, z) \in \Omega_2, \quad r \geq 0, \quad (42)$$

$$\Delta U \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (43)$$

Считаем, что задано распределение потенциала на границе области Ω_2 :

$$U|_{\Gamma} = U_B(\eta), \quad \eta \in \Gamma, \quad \Gamma = \partial\Omega_2 \setminus \{r = 0\}. \quad (44)$$

На оси z цилиндра выполняется условие Неймана в виде (10). Данное условие азимутальной симметричности учитывается при построении функции источника G_2 , но точки коллокации вдоль оси z не располагаются.

Потенциал $U(r, z)$ в области Ω_2 ищем методом дискретных источников (МДИ) по методике, изложенной п. 2.2:

$$U(r, z) = \sum_{i_2=1}^{N_2} Q_{i_2}(r_{i_2}, z_{i_2}) G_2(r, z, r_{i_2}, z_{i_2}), \quad (45)$$

где (r_{i_2}, z_{i_2}) – координаты N_2 штук дискретных источников Q_{i_2} , расположенных вдоль вспомогательной линии $\mathcal{S}$, построенной «параллельно» границе Γ .

Компоненты электрического поля (22) с учётом (23) имеют вид:

$$E_r(r, z) = - \sum_{i_2=1}^{N_2} Q_{i_2}(r_{i_2}, z_{i_2}) \frac{\partial G_2}{\partial r}(r, z, r_{i_2}, z_{i_2}), \quad (46)$$

$$E_\varphi(r, z) \equiv 0, \quad (47)$$

$$E_z(r, z) = - \sum_{i_2=1}^{N_2} Q_{i_2}(r_{i_2}, z_{i_2}) \frac{\partial G_2}{\partial z}(r, z, r_{i_2}, z_{i_2}). \quad (48)$$

Функция Грина (источника):

$$G_2(r, z, r_0, z_0) = C_2 \mathcal{F}(\kappa) \chi_2^{-1/2} \quad (49)$$

имеет физический смысл потенциала, который заряженное кольцо нулевой толщины с центром в $r = 0$, проходящее через точку (r_0, z_0) , создаёт в точке (r, z) . Здесь:

$$C_2 = \frac{4}{2\pi} C_3 = \frac{1}{4\pi^2 \varepsilon_0}, \quad \chi_2 = (r + r_0)^2 + (z - z_0)^2. \quad (50)$$

Производные функции источника вдоль координатных осей r и z имеют вид:

$$\frac{\partial G_2}{\partial r}(r, z, r_0, z_0) = -C_2 \left\{ (r + r_0) \mathcal{P}(\kappa) - \frac{2r_0}{\kappa^2} (\mathcal{P}(\kappa) - \mathcal{F}(\kappa)) \right\} \chi_2^{-3/2}, \quad (51)$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial z}(r, z, r_0, z_0) = -C_2 (z - z_0) \mathcal{P}(\kappa) \chi_2^{-3/2}, \quad (52)$$

Для ускорения вычислений производится параболическая интерполяция эллиптических интегралов $\mathcal{F}(\kappa), \mathcal{P}(\kappa)$ по заранее заготовленной таблице их значений от аргумента:

$$\kappa^2(r, z, r_0, z_0) = 4 r r_0 \chi_2^{-1}; \quad (53)$$

$$\mathcal{F}(\kappa) = \int_0^{\pi/2} (1 - \kappa^2 \sin^2 \beta)^{-1/2} d\beta, \quad \mathcal{P}(\kappa) = \int_0^{\pi/2} (1 - \kappa^2 \sin^2 \beta)^{-3/2} d\beta. \quad (54)$$

Величины зарядов Q_{i_2} определяются из СЛАУ, определённой в (25):

$$\begin{cases} \sum_{i_2=1}^{N_2} Q_{i_2}(r_{i_2}, z_{i_2}) G_2(r_j, z_j, r_{i_2}, z_{i_2}) = U_B(r_j, z_j), \\ j = \overline{1, N_2}. \end{cases} \quad (55)$$

где U_B – распределение потенциала (44) вдоль границы области, определяемое для точек коллокации $\eta_j \equiv (r_j, z_j)$.

3. Методы учёта пространственного заряда. Для нахождения электрического поля с учётом пространственного (объёмного) заряда (ПЗ) электронного пучка необходимо решить уравнение Пуассона описанными в п. 1 методами трубок тока и последовательных итераций.

3.1. Применение МДИ для решения уравнения Пуассона. Метод дискретных источников, изложенный в п. 2 применительно к уравнению Лапласа, естественным образом адаптируется и для решения уравнения Пуассона

$$\Delta U = \rho \quad (56)$$

с такими же граничными условиями (8)–(9).

Аналогичным образом строится вспомогательная граница $\mathcal{S}$, целиком лежащая вне расчётной области Ω . На $\mathcal{S}$ размещаются N дискретных источников Q_i с координатами ξ_i , а на границе Γ – точки коллокации, в которых проверяется граничное условие (8). Потенциал U в любой точке внутри области представляем в виде суммы двух компонент:

$$U(\eta) = U_D(\eta) + U_S(\eta), \quad \eta \in \Omega. \quad (57)$$

Потенциал U_D порождён граничными электродами и находится аналогично (21):

$$U_D(\eta) = \sum_{i=1}^N Q_i G(\eta, \xi_i), \quad \xi_i \in \mathcal{S}. \quad (58)$$

Потенциал U_S порождён пространственным зарядом пучка $\rho(\eta)$ на предыдущей итерации. На нулевой итерации заряд отсутствует ($\rho(\eta) \equiv 0$, $U_S(\eta) \equiv 0$), а на последующих итерациях он находится согласно анзацу МДИ:

$$U_S(\eta) = \sum_{m=1}^M Q_m G(\eta, \xi_m), \quad \xi_m \in \Omega, \quad (59)$$

где M – общее количество ячеек сетки для учёта ПЗ, Q_m – заряды, сосредоточенные в центрах ξ_m ячеек этой сетки. Величины зарядов Q_m находятся методом трубок тока по формуле (1) при интегрировании уравнения движения (2) для всех электронов.

Величины зарядов Q_i находятся из системы N линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} U_D(\eta_j) + U_S(\eta_j) = U_B(\eta_j), \\ j = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (60)$$

полученной проверкой граничного условия (равенство потенциала (57) заданному распределению $U_B(\eta_j)$) в дискретных точках (точках коллокации η_j), расположенных с некоторым шагом на поверхности электродов Γ .

Компоненты электрического поля (22) получаются путём дифференцирования обеих частей потенциала U вдоль соответствующих координатных осей по формулам, аналогичным (23). Фактически, в силу линейности представлений (58) и (59), требуется дифференцировать лишь функцию источников G :

$$E(\eta) = -\nabla U(\eta) = -\sum_{i=1}^N Q_i \nabla G(\eta, \xi_i) - \sum_{m=1}^M Q_m \nabla G(\eta, \xi_m). \quad (61)$$

3.2. Азимутально-симметричный случай. МДИ для уравнения Пуассона в азимутально-симметричном случае с Лапласианом (43) и граничными условиями (44), (10) строится по формулам (57)–(60) очевидным образом:

$$U(r, z) = U_{D_2}(r, z) + U_{S_2}(r, z), \quad (r, z) \in \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2, \quad (62)$$

$$U_{D_2}(r, z) = \sum_{i_2=1}^{N_2} Q_{i_2}(r_{i_2}, z_{i_2}) G_2(r, z, r_{i_2}, z_{i_2}), \quad (r_{i_2}, z_{i_2}) \in \mathcal{S}. \quad (63)$$

Функция источника G_2 и её производные определяются формулами (49)–(52).

Величины зарядов Q_{i_2} находятся из системы (60) с N_2 уравнениями, где $\eta_j \equiv (r_j, z_j)$.

Порождённый пространственным зарядом электронного пучка потенциал:

$$U_{S_2}(r, z) = \sum_{m_2=1}^{M_2} Q_{m_2}(r_{m_2}, z_{m_2}) G_2(r, z, r_{m_2}, z_{m_2}), \quad (r_{m_2}, z_{m_2}) \in \Omega_2 \quad (64)$$

с той же функцией Грина G_2 , что и при нахождении потенциала на границе; M_2 – общее количество ячеек сетки для учёта ПЗ.

3.3. Азимутально-несимметричный случай. На практике реализация МДИ для уравнения Пуассона (56) с Лапласианом (30) и граничным условием (31) в цилиндрической области является весьма нетривиальной задачей. Сначала формально воспользуемся формулами (57)–(60):

$$U(r, \varphi, z) = U_{D_3}(r, \varphi, z) + U_{S_3}(r, \varphi, z), \quad (r, \varphi, z) \in \Omega_3 \subset \mathbb{R}^3, \quad (65)$$

$$U_{D_3}(r, \varphi, z) = \sum_{i_3=1}^{N_3} Q_{i_3} G_3(r, \varphi, z, r_{i_3}, \varphi_{i_3}, z_{i_3}), \quad (r_{i_3}, \varphi_{i_3}, z_{i_3}) \in \mathcal{S}. \quad (66)$$

Функция источника G_3 и её производные определяются формулами (36)–(40).

Величины зарядов Q_{i_3} находятся из системы (60) с N_3 уравнениями, где $\eta_j \equiv (r_j, \varphi_j, z_j)$.

Порождённый пространственным зарядом электронного пучка потенциал:

$$U_{S_3}(r, \varphi, z) = \sum_{m_3=1}^{M_3} Q_{m_3} G_3(r, \varphi, z, r_{m_3}, \varphi_{m_3}, z_{m_3}), \quad (r_{m_3}, \varphi_{m_3}, z_{m_3}) \in \Omega_3 \quad (67)$$

с той же функцией Грина G_3 , что и при нахождении потенциала на границе; M_3 – общее количество ячеек сетки для учёта ПЗ.

3.4. Усреднение объёмного заряда по азимуту. Если буквально следовать формулам (65)–(67), получится СЛАУ с полностью заполненной матрицей размерностью N_3 порядка десятков или сотен тысяч неизвестных. Такую систему затруднительно как разместить в памяти современных компьютеров, так и решить за приемлемое время.

Для решения этой проблемы можно принять, что влияние ПЗ на граничные условия учитывается *усреднённо* по азимуту, что оправданно в случае умеренных значений неоднородности плотности эмиссии или малых нарушений соосности электродной и магнитной подсистем (при этом сами подсистемы остаются азимутально-симметричными).

Потенциал U в любой точке цилиндрической области Ω_3 представим в виде:

$$U(r, \varphi, z) = U_{D_2}(r, z) + U_{S_3}(r, \varphi, z), \quad (r, \varphi, z) \in \Omega_3 \subset \mathbb{R}^3. \quad (68)$$

Потенциал U_{D_2} , порождённый азимутально симметричными граничными электродами ЭОС, находим по формуле (63), а порождённый объёмным зарядом пучка [несимметричный] потенциал U_{S_3} — по формуле (67).

Неизвестные величины N_2 вспомогательных зарядов Q_{i_2} находятся из СЛАУ:

$$\begin{cases} U_{D_2}(r_j, z_j) + \bar{U}_{S_2}(r_j, z_j) = U_B(r_j, z_j), \\ j = \overline{1, N_2}, \end{cases} \quad (69)$$

$$\text{Где} \quad \bar{U}_{S_2}(r, z) \equiv \int_0^{2\pi} U_{S_3}(r, \varphi, z) d\varphi = \sum_{m_2=1}^{M_2} \bar{Q}_{m_2}(r_{m_2}, z_{m_2}) G_2(r, z, r_{m_2}, z_{m_2}) \quad (70)$$

– усреднённый по азимуту потенциал, порождённый пространственным зарядом пучка на предыдущей итерации. Величины зарядов $\bar{Q}_{m_2}$ получены суммированием зарядов Q_{m_3} по азимуту для каждого элемента сетки в плоскости (r, z) :

$$\bar{Q}_{m_2}(r_{m_2}, z_{m_2}) = \sum_{m_1=1}^{M_\varphi} Q_{m_3}(r_{m_3}, \varphi_{m_1}, z_{m_3}), \quad (71)$$

где M_φ – количество ячеек сетки в азимутальном измерении, M_2 – количество ячеек сетки в плоскости (r, z) в каждом азимутальном сечении, $M_3 = M_2 M_\varphi$ – общее количество ячеек сетки для учёта пространственного заряда электронного пучка.

Как можно заметить из определений (68) и (69), в этой простейшей гибридной модели оказалось нарушенным установленное ранее правило формирования СЛАУ; для проверки граничного условия тут используется двумерная (азимутально-симметричная) проекция объёмного потенциала U_{S_3} . В результате, ни в одной из N_2 точек коллокации (и, тем более, между ними) граничное условие (31) не выполняется строго.

С одной стороны, этот подход позволил понизить размерность СЛАУ с N_3 до N_2 , т.е. в $N_\varphi = N_3/N_2 \approx 10^2..10^3$ раз и, тем самым, позволил решить задачу на персональном компьютере. С другой стороны, при усреднении (71) потерялась информация об азимутальном распределении пространственного заряда, и если отклонения от среднего в этом распределении велики, то и погрешность вычисления поля будет также велика. В основном, это критично для области эмиссии электронов, где ПЗ напрямую примыкает к границе (электроду-эмиттеру), особенно в случае существенной неоднородности плотности эмиссии. Для исправления этого недостатка можно использовать следующий подход.

3.5. Метод локальных коррекций (МЛК). В границе Γ цилиндрической (азимутально-симметричной) рабочей области $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^n$ выделим часть Γ_3 и оставшуюся часть Γ_2 :

$$\partial\Omega_3 \equiv \Gamma = \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_3. \quad (72)$$

Потенциал U в любой точке области представим в виде суммы *трёх* компонент:

$$U(r, \varphi, z) = U_{D_2}(r, z) + U_{D_3}(r, \varphi, z) + U_{S_3}(r, \varphi, z), \quad (r, \varphi, z) \in \Omega_3. \quad (73)$$

Порождённый объёмным зарядом пучка [несимметричный] потенциал U_{S_3} находится по формуле (67). Потенциал, порождённый граничными электродами ЭОС, складывается из потенциала U_{D_2} , который отражает усреднённое по азимуту влияние электродов на части границы Γ_2 и неусреднённого потенциала U_{D_3} от электродов на части границы Γ_3 :

$$U_{D_2}(r, z) = \sum_{i_2=1}^{N_2} Q_{i_2}(r_{i_2}, z_{i_2}) G_2(r, z, r_{i_2}, z_{i_2}), \quad (74)$$

$$U_{D_3}(r, \varphi, z) = \sum_{i_3=1}^{N_3} Q_{i_3}(r_{i_3}, \varphi_{i_3}, z_{i_3}) G_3(r, \varphi, z, r_{i_3}, \varphi_{i_3}, z_{i_3}), \quad (75)$$

где $Q_{i_2}(r_{i_2}, z_{i_2})$ и $Q_{i_3}(r_{i_3}, \varphi_{i_3}, z_{i_3})$ – дискретные источники, расположенные на вспомогательной поверхности $\mathcal{S}$, построенной «параллельно» границе Γ . Функция источника G_2 и её производные определяются формулами (49)–(52), а G_3 и её производные – формулами (36)–(40).

Неизвестные величины $N = N_2 + N_3$ вспомогательных граничных зарядов Q_{i_2} и Q_{i_3} находятся из СЛАУ, полученной проверкой граничного условия (31) в точках коллокации:

$$\begin{cases} U_{D_2}(r_j, z_j) + U_{D_3}(r_j, \varphi_j, z_j) + U_{S_3}(r_j, \varphi_j, z_j) = U_B(r_j, \varphi_j, z_j), \\ j = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (76)$$

При этом на части границы Γ_2 располагаются точки коллокации (r_j, z_j) , $j = \overline{1, N_2}$, а на участке границы Γ_3 точки (r_j, φ_j, z_j) , $j = \overline{N_2 + 1, N_2 + N_3}$ распределены также и по азимуту.

Данный подход является компромиссом между методами, описанными в пп. 3.3 и 3.4, и переходит в них в предельных случаях: при $\Gamma \equiv \Gamma_3$ получается исходный азимутально-несимметричный подход (п. 3.3), а при $\Gamma \equiv \Gamma_2$ – вариант с усреднением ПЗ по азимуту (п. 3.4). В неопредельном варианте МЛК позволяет строго выполнить граничное условие (31) по крайней мере в точках коллокации, относящихся к участку границы Γ_3 . Разумно расположить этот участок в областях эмиттера и коллектора, где ПЗ напрямую примыкает к граничным электродам. На остальной части границы Γ_2 объёмный заряд не подходит близко к границе и влияние его асимметрии заметно меньше.

Альтернативная модификация МЛК – *метод точечных поправок* (МТП) заключается в том, что часть Γ_2 , где граничное условие выполняется усреднённо по азимуту, совпадает со всей границей Γ , но на части границы $\Gamma_3 \subset \Gamma$ дополнительно присутствуют точки коллокации и дискретные источники, распределённые по азимуту. При этом *вместо* СЛАУ (76) для нахождения величин вспомогательных граничных зарядов Q_{i_2} и Q_{i_3} необходимо решить *две* СЛАУ: сначала (69) для нахождения всех усреднённых Q_{i_2} (не принимая в расчёт существование источников, соответствующих Γ_3), а затем, уже зная U_{D_2} , решить ещё одну СЛАУ (76) для нахождения зарядов Q_{i_3} , которые в этом случае уже имеют смысл несимметричных точечных поправок к заряженным кольцам Q_{i_2} . Такой подход приводит к матрицам СЛАУ с более качественной структурой. Если отклонения от среднего в распределении ПЗ малы, то и величины поправочных зарядов также будут малы.

Расход памяти на хранение СЛАУ и время её обращения быстро растут при увеличении части Γ_3 ; не имеет смысла использовать этот метод уже при $N_3 > 10^4$. В случае сильной асимметрии ПЗ вдоль всей ЭОС необходимо воспользоваться следующим подходом.

3.6. Метод множественных покрытий границы. Метод множественных покрытий границы (ММП) является развитием метода локальных коррекций, изложенного выше. Суть ММП заключается в том, что граница области Γ и вспомогательная граница $\mathcal{S}$ покрываются точками коллокации η_j и дискретными источниками ξ_i не единственным образом, а несколькими наборами. Выбор используемого при расчёте потенциала $U(\eta)$ покрытия зависит от точки наблюдения η , при этом сам потенциал рассчитывается по формуле (73).

Рабочая область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ разбивается по продольной координате z на W непересекающихся подобластей (регионов):

$$\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_W. \quad (77)$$

Каждой точке $\eta \in \Omega$ ставится в соответствие регион $w(\eta)$, $\eta \in \Omega_w$. Для каждого региона $w = \overline{1, W}$ производится независимое разбиение (72) границы Γ на части, где граничные условия выполняются строго и усреднённо по азимуту. Соответственно, требуется индивидуальное для каждого региона размещение точек коллокации $\{\eta_j\}_w$ на границе Γ и дискретных источников $\{\xi_i\}_w$ на вспомогательной границе $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \{\eta_j\}_w, \quad \eta_j \in \Gamma, \quad j = \overline{1, N_w}, \\ \{\xi_i\}_w, \quad \xi_i \in \mathcal{S}, \quad i = \overline{1, N_w}, \end{aligned} \quad w = \overline{1, W}, \quad (78)$$

где N_w – количество дискретных элементов границ для региона Ω_w .

Таким образом, применив к каждому региону МЛК, и решив W штук соответствующих СЛАУ (с размерностями N_w), получим в результате решение $U(\eta)$ уравнения Пуассона (56) для любой точки рабочей области $\eta \in \Omega$. Потенциал, порождённый граничными электродами, складывается из U_{D_2} , который отражает усреднённое по азимуту влияние дальних границ и U_{D_3} – неусреднённый потенциал от электродов, ближайших к текущей точке наблюдения η .

Наилучшее применение ММП даёт в паре с МТП. В этом случае создаётся единственное азимутально-симметричное покрытие всей области, дающее одну СЛАУ (69) с $\Gamma_2 = \Gamma$, а для точечных несимметричных поправок область разбивается согласно (77)–(78), и вместо одной поправочной СЛАУ (76) большого размера получают W СЛАУ меньшего размера, дающие поправки Q_{i_3} только для локальной окрестности текущей точки интегрирования. В момент перехода точки интегрирования из одного региона в другой поле может измениться скачкообразно. Во избежание этого эффекта следует делать соседние покрытия перекрывающимися, т.е. необходимо располагать источники и точки коллокации и за пределами области Ω_w . При этом переключение между регионами происходит строго по их границе, т.е. в середине области перекрытия.

ММП имеет смысл использовать не только в несимметричном случае для распространения МЛК на всю границу Γ , но и в азимутально-симметричном случае. Размещения (78) можно устроить так, чтобы в окрестности точки наблюдения источники и точки коллокации располагались гуще, чем на периферии, и, тем самым, давали бы более точное решение при малом общем количестве источников, что экономит время как при разложении матрицы СЛАУ, так и при нахождении граничного потенциала U_D . Платой за это является необходимость построения W различных покрытий границы и, соответственно, решение W штук СЛАУ, а при интегрировании уравнений движения – необходимость дополнительно проводить определение региона Ω_w , в который попала текущая точка интегрирования η .

Заключение. После подтверждения работоспособности кода ANGEL-TA-S2D в двумерных расчетах технологических систем [11], были разработаны методы трехмерного моделирования, описанные в данной статье. Эти алгоритмы были реализованы на языке Fortran-90 и включены в состав комплекса программ ANGEL-TA-S3D. По результатам сравнения как с традиционными двумерными кодами, так и с коммерческими пакетами программ, новый код показал высокую точность и эффективность работы при проектировании пушек и коллекторов гиротронов, в том числе их вариантов со сложной азимутально-несимметричной конфигурацией.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке проекта по теме FFUF-2022-0007 «Создание мощных источников электромагнитного излучения ЭЦР диапазона». Автор благодарен В. Е. Запечалову, А. Д. Юнаковскому, О. П. Планкину и А. С. Зуеву за внимание к работе и плодотворные дискуссии.

Список источников

1. Мануилов В. Н. Электронные пучки для мазеров на циклотронном резонансе и лазеров на свободных электронах / Мануилов В. Н. // Соросовский образовательный журнал, 2001. – Т. 7. – № 10. – С. 81–87.
2. Цимринг Ш. Е. Введение в высокочастотную вакуумную электронику и физику электронных пучков / Ш. Е. Цимринг – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2012. 576 с.
3. Завольский Н.А. Влияние несоосности электронного пучка и резонатора на характеристики гиротрона / Н.А. Завольский, В.Е. Запечалов, М.А. Моисеев, и др. // Известия вузов. Радиофизика, 2011. – Т. 54 – № 6 – С. 444.
4. Pagonakis I. et al. Overview on recent progress in magnetron injection gun theory and design for high power gyrotrons. EPJ Web of Conferences. – EDP Sciences, 2019, vol. 203, p. 04011.
5. Krivosheev P.V., Lygin V.K., Manuilov V.N., et al. Numerical simulation models of focussing systems of intense gyrotron helical electron beams. Int. J. of Infrared and MM waves, 2001, vol. 22, no. 8, p. 1119.
6. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики / В. П. Ильин. – М.: Наука, 1985.
7. Вашковский А.В. К нахождению распределения потенциала в области, ограниченной заданными формами с заданными потенциалами / А.В. Вашковский, В.Т. Овчаров // Электронная техника. Сер. 1, Электроника СВЧ, 1971. – № 9. – С. 34.
8. Лыгин В.К. О методах интегральных уравнений и вспомогательных зарядов в траекторном анализе интенсивных электронных пучков / В.К. Лыгин, В.Н. Мануилов, Ш.Е. Цимринг // Электронная техника, Сер. 1, Электроника СВЧ, 1987. – №7 (401). – С. 36-38.
9. Планкин О. П. Комплекс программ ANGEL-2DS для моделирования пушки гиротрона. Инструкция для пользователя / О.П. Планкин, Е.С. Семенов // Методическая разработка. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2011. 32 с.
10. Семенов Е.С. Расчет статического магнитного поля системы соленоидов / Е.С. Семенов, А.Д. Юнаковский // Известия вузов. Радиофизика, 2010. – Т. 53. – № 12. – С.799-802.
11. Планкин О. П. Траекторный анализ электронно-оптической системы технологического гиротрона / О.П. Планкин, Е.С. Семенов // Вестник НГУ, серия «Физика», 2013. – Т. 8. – № 2. – С. 44–54.

Семенов Евгений Сергеевич. К.ф.-м.н., Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук, научный сотрудник. AuthorID: 146102, SPIN: 9049-4781, ORCID: 0000-0003-1572-985X. semes@ipfran.ru, 603950, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46.

UDC 621.385.69

DOI:10.25729/ESI.2025.39.3.014

Algorithms for three-dimensional simulation of electron-optical system of the gyrotrons used in the ANGEL-TA-S3D program

Evgeniy S. Semenov

Institute of applied physics RAS,

Russia, Nizhny Novgorod, semes@ipfran.ru

Abstract. The article describes mathematical methods used to calculate an azimuthally asymmetric electric field for trajectory analysis of electron beams in gyrodevices. These algorithms, including some modifications of the discrete sources method implemented in the ANGEL software package, have shown high accuracy and efficiency in the design of guns and collectors of gyrotrons.

Keywords: electronic optics, gyrotron, discrete sources method, current pipes method, Poisson equation

Acknowledgements: The work was carried out with financial support on the topic FFUF-2022-0007 "Creation of powerful sources of electromagnetic radiation of the ECR range". The author is grateful to V. E. Zapevalov, A. D. Yunakovsky, O. P. Plankin and A. S. Zuev for their attention to the work and fruitful discussions.

References

1. Manuilov V.N. Elektronnyye puchki dlya mazerov na tsiklotronnom rezonanse i lazerov na svobodnykh elektronakh [Electron Beams for Cyclotron Resonance Masers and Free-Electron Lasers]. Sorosovskiy obrazovatel'nyy zhurnal [Soros educational journal], 2001, vol. 7, no. 10, pp. 81-87.
2. Tsimring Sh.E. Vvedenie v vysokochastotnyy vakuumnyy elektroniku i fiziku elektronnykh puchkov [Electron beam and microwave vacuum electronics]. N. Novgorod, IPF RAN Publ., 2012, 576 p.
3. Zavolsky N.A., Zapevalov V.E., Moiseev M.A., et al. Vliyanie nesoosnosti elektronnoy puchki i rezonatora na harakteristiki girotrona [The effect of electron beam and resonator misalignment on the characteristics of the gyrotron]. Izvestiya vuzov. Radiofizika [Radiophysics and quantum electronics], 2011, vol. 54, no. 6, pp. 444.
4. Pagonakis I. et al. Overview on recent progress in magnetron injection gun theory and design for high power gyrotrons. EPJ Web of Conferences. – EDP Sciences, 2019, vol. 203, p. 04011.
5. Krivosheev P.V., Lygin V.K., Manuilov V.N., et al. Numerical simulation models of focussing systems of intense gyrotron helical electron beams. Int. J. of Infrared and MM waves, 2001, vol. 22, no. 8, p. 1119.
6. Il'in V.P. Chislennyye metody resheniya zadach elektrofiziki [Numerical methods for solving problems of electrophysics]. Moscow, Nauka Publ., 1985.
7. Vashkovskiy A.V., Ovcharov V.T. K nakhozhdeniyu raspredeleniya potentsiala v oblasti, ogranichennoy zadannymi formami s zadannymi potentsialami [On finding the potential distribution in a region bounded by given shapes with given potentials]. Elektronnaya tekhnika. Ser. 1, Elektronika SVCh [Electronic engineering. Ser. 1, Microwave electronics], 1971, no. 9, p. 34.
8. Lygin V.K., Manuilov V.N., Tsimring Sh.E. O metodakh integral'nykh uravneniy i vspomogatel'nykh zaryadov v traektornom analize intensivnykh elektronnykh puchkov [On the methods of integral equations and auxiliary charges in the trajectory analysis of intense electron beams]. Elektronnaya tekhnika. Ser. 1, Elektronika SVCh [Electronic Engineering. Ser. 1, Microwave Electronics], 1987, no. 7 (401), pp. 36-38.
9. Plankin O.P., Semenov E.S. Kompleks programm ANGEL-2DS dlya modelirovaniya pushki girotrona. Instruktsiya dlya pol'zovatelya [ANGEL-2DS software package for gyrotron gun modeling. User manual]. Metodicheskaya razrabotka [Methodological development]. N. Novgorod, IPF RAN Publ., 2011, 32 p.
10. Semenov E.S., Yunakovskiy A.D. Raschet staticheskogo magnitnogo polya sistemy solenoidov [Calculation of the static magnetic field of a solenoid system]. Izvestiya vuzov. Radiofizika [Radiophysics and quantum electronics], 2010, vol. 53, no. 12, pp. 799-802.
11. Plankin O.P., Semenov E.S. Traektornyy analiz elektronno-opticheskoy sistemy tekhnologicheskogo girotrona [Trajectory analysis of the electron-optical system of a technological gyrotron]. Vestnik NGU, seriya "Fizika" [Bulletin of NSU, Series "Physics"], 2013, vol. 8, no. 2, pp. 44-54.

Semenov Evgeniy Sergeevich. PhD, Federal Research Center A.V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, research fellow. AuthorID: 146102, SPIN: 9049-4781, ORCID: 0000-0003-1572-985X. semes@ipfran.ru, 46 Ulyanov Str., 603950 Nizhny Novgorod, Russia.

Статья поступила в редакцию 23.05.2025; одобрена после рецензирования 25.06.2025; принята к публикации 25.08.2025.

The article was submitted 05/23/2025; approved after reviewing 06/25/2025; accepted for publication 08/25/2025.